ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет»

Т. В. Елисеева

Интегральные уравнения и вариационное исчисление

Учебное пособие

Пенза
Издательство
Пензенского государственного
университета
2008

УДК 517.9
Е51

Р е ц е н з е н т ы:

кафедра «Вычислительные системы и моделирование»
ГОУВПО «Пензенский государственный педагогический университет
им. В. Г. Белинского»;

заведующий кафедрой «Математический анализ»
ГОУВПО «Пензенский государственный педагогический университет
им. В. Г. Белинского», кандидат физико-математических наук, доцент

О. Э. Яремко

Елисеева, Т. В.

Е51 Интегральные уравнения и вариационные исчисления : учеб. пособие / Т. В. Елисеева. – Пенза : Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2008. – 104 с.

Содержатся основные сведения из вариационного исчисления и теории интегральных уравнений. В конце каждого раздела имеются упражнения для закрепления теоретического материала и его применения к решению уравнений.

Учебное пособие подготовлено на кафедре «Высшая и прикладная математика» и предназначено для студентов, обучающихся по специальности «Физика».

УДК 517.9

СОДЕРЖАНИЕ

Р а з д е л 1. Функционалы. Простейшая задача вариационного исчисления

§1. Функционалы. Функциональные пространства

Во многих задачах, возникающих в анализе, механике, геометрии и т. д., важную роль играют переменные величины, называемые функционалами.

Мы говорим, что нам задан ***функционал***, если каждой функции (или кривой) из некоторого класса поставлено в соответствие определенное число. Таким образом, можно сказать, что функционалы – это функции, в которых роль независимого переменного играют кривые или функции.

Примеры функционалов.

1. Рассмотрим на плоскости всевозможные спрямляемые кривые. Каждой такой кривой соответствует определенное число – ее длина. Таким образом, длина кривой представляет собой функционал, определенный на множестве спрямляемых кривых.

2. Рассмотрим на плоскости всевозможные пути, соединяющие две данные точки A и B. Пусть некоторое тело может двигаться по любому из этих путей, имея в каждой точке (x, y) определенную скорость $v(x, y)$. Мы получим функционал, поставив в соответствие каждому пути то время, за которое рассматриваемое тело проходит этот путь.

3. Пусть $y(x)$ – произвольная, непрерывно дифференцируемая функция, определенная на отрезке $[a, b]$. Определим на множестве всех таких функций функционал $J[y]=\int\limits_a^b y'^2(x)dx.$

4. Рассмотрим более общий пример. Пусть $F(x, y, z)$ – некоторая непрерывная функция трех переменных. Выражение

$$J[y]=\int\limits_a^b F\big(x, y(x), y'(x)\big)dx, \tag{1.1}$$

где $y(x)$ пробегает совокупность всевозможных непрерывно дифференцируемых функций, определенных на отрезке $[a, b]$, представляет собой функционал. Выбирая ту или иную функцию F, мы будем получать различные функционалы, например если

$$F(x, y, z) = \sqrt{1+z^2},$$

то $J[y]$ – длина кривой $y = y(x)$ (пример 1), а при $F(x, y, z) = z^2$ получаем предыдущий пример. Функционалы вида (1.1) мы и будем рассматривать ниже.

Наиболее разработанными являются методы нахождения наибольших и наименьших значений функционалов. Этот наиболее разработанный раздел «исчисления функционалов» называется ***вариационным исчислением***.

Укажем некоторые типичные примеры вариационных задач, т. е. задач на нахождение наибольших и наименьших значений функционалов.

1. Среди всех плоских кривых, соединяющих две заданные точки A и B, найти ту, которая имеет наименьшую длину; иначе говоря, найти кривую $y = y(x)$, для которой функционал $\int\limits_a^b \sqrt{1+y'^2}\,dx$ достигает минимума. Искомой линией будет отрезок прямой, соединяющий точки A и B.

2. Л. Эйлером было дано решение следующей вариационной задачи (изопериметрическая задача): среди всех замкнутых кривых, имеющих данную длину S, найти ту, которая ограничивает наибольшую площадь. Такой кривой является окружность.

Каждую функцию $y(x)$, принадлежащую какому-либо классу, мы будем рассматривать как точку некоторого пространства. Пространства, элементами которых являются функции, мы будем называть ***функциональными пространствами.***

Не существует какого-либо «универсального» функционального пространства; сами эти пространства приходится выбирать в зависимости от характера рассматриваемой вариационной задачи. Например, если речь идет о функционале вида $\int\limits_a^b F(x, y, y')\,dx$, то, естественно, рассматривать его на совокупности всех функций, имеющих непрерывную первую производную, а в случае функционала вида $\int\limits_a^b F(x, y, y', y'')dx,$ следует за соответствующее функциональное пространство взять класс дважды непрерывно дифференцируемых функций. Поэтому для того чтобы задать функциональное пространство, надо прежде всего задать класс рассматриваемых функций.

Для функционалов так же, как и для обычных функций, рассматриваемых в классическом анализе, важную роль играет понятие непрерывности. Для того чтобы сформулировать это понятие для функционалов, необходимо ввести в функциональном пространстве тем или иным путем понятие близости элементов. Это удобнее всего сделать, введя для функций понятие нормы – аналог расстояния между точками в евклидовом пространстве.

Хотя в дальнейшем мы будем всегда рассматривать именно функциональные пространства, нам удобнее будет сейчас ввести понятие нормы несколько более общим и абстрактным образом, а именно сформулировав определение линейного нормированного пространства.

Линейным пространством называется совокупность R элементов x, y, z, ... произвольной природы, для которых определены операции сложения и умножения их на числа, причем выполнены следующие аксиомы:

1) $x + y = y + x$;

2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

3) существует такой элемент 0 (нулевой элемент), что $x + 0 = x$ для любого x из R;

4) для каждого $x \in R$ существует такой элемент $-x$, что $x + (-x) = 0$;

5) $1 \cdot x = x$;

6) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Линейное пространство R называется ***нормированным***, если каждому элементу $x \in R$ поставлено в соответствие неотрицательное число $\|x\|$ – норма этого элемента так, что

1) $\|x\| = 0$ только при $x = 0$;

2) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$;

3) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

В линейном нормированном пространстве можно говорить о расстоянии между элементами, понимая под расстоянием между x и y величину $\|x - y\|$. Элементами линейного нормированного пространства могут быть объекты произвольной природы: системы чисел, векторы (т. е. направленные отрезки), матрицы, функции и т. д.

Для нас важны следующие пространства.

1. Пространство C, состоящее из всех непрерывных функций, определенных на некотором отрезке $[a, b]$. Сложение элементов и умножение их на числа вводятся как обычные сложение функций и умножение их на числа, а норма определяется как максимум модуля, т. е. $\|y\| = \max\limits_{a \le x \le b} |y(x)|$.

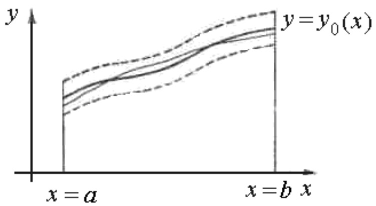

Рис. 1

Таким образом, в пространстве C мы считаем функцию $y(x)$ отстоящей от функции $y_0(x)$ не больше чем на ε, если ее график целиком лежит внутри полосы, шириной 2ε (по вертикали), окружающей график функции $y_0(x)$ (рис. 1).

2. Пространство C^1, состоящее из всех функций, определенных на некотором отрезке $[a, b]$ и непрерывных на этом отрезке вместе со своей первой производной. Операции сложения и умножения на числа вводятся так же, как и в C, а норма определяется формулой

$$\|y\|_1 = \max|y(x)| + \max|y'(x)|.$$

Таким образом, близость функций в пространстве C^1 означает, что близки как сами функции, так и их первые производные.

После того как в линейном (в частности, функциональном) пространстве R введена норма, для функционалов естественно вводится понятие непрерывности, а именно: функционал $\varphi(y)$ называется ***непрерывным*** в точке $y_0 \in R$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что $|\varphi(y) - \varphi(y_0)| < \varepsilon$ как только $\|y - y_0\| < \delta$.

§ 2. Дифференциал функционала. Необходимое условие экстремума

Пусть R – линейное нормированное пространство и пусть каждому элементу h из R поставлено в соответствие число $\varphi(h)$, т. е. задан функционал.

Функционал $\varphi(h)$ называется ***линейным***, если он

1) непрерывен,

2) для любых h_1, h_2 из R удовлетворяет условию

$$\varphi(h_1 + h_2) = \varphi(h_1) + \varphi(h_2).$$

П р и м е р ы:

1) в пространстве C $\varphi(h) = \int\limits_{x_1}^{x_2} h(x)dx$;

2) в пространстве C $\varphi(h) = \int\limits_{x_1}^{x_2} a(x)h(x)dx$, где $a(x)$ – фиксированная функция.

Лемма 2.1. Если $a(x)$ – непрерывная функция и $\int\limits_a^b a(x)h(x)dx = 0$ для любой непрерывной функции $h(x)$, имеющей непрерывную производную и удовлетворяющей условию $h(a) = h(b) = 0$, то $a(x) \equiv 0$.

Д о к а з а т е л ь с т в о.

Пусть в некоторой точке c $a(c) \neq 0$, например, $a(c) > 0$, тогда найдется интервал $\xi_1 < c < \xi_2$, содержащийся в интервале (a,b), в котором $a(x)>0$. Положим $h(x)=(\xi_1-x)^2(\xi_2-x)^2$ на интервале (ξ_1,ξ_2) и $h(x)=0$ вне этого интервала. $h(x)$ удовлетворяет условиям леммы. В то же время

$$\int_a^b a(x)h(x)dx=\int_{\xi_1}^{\xi_2} a(x)(\xi_1-x)^2(\xi_2-x)^2dx>0,$$

так как под знаком интеграла стоит положительная непрерывная функция.

Полученное противоречие доказывает лемму.

Рассмотрим в пространстве C^1 линейный функционал

$$\int_{x_1}^{x_2}[a(x)h(x)+b(x)h'(x)]dx.$$

Лемма 2.2. Если

$$\int_a^b[a(x)h(x)+b(x)h'(x)]dx=0$$

для каждой функции $h(x)$ из C^1 такой, что $h(a)=h(b)=0$, то функция $b(x)$ дифференцируема и $a(x)-b'(x)=0$.

Рассмотрим функционал $J[y]$ и его приращение $\Delta J=J[y+h]-J[y]$, отвечающее приращению h. Если y фиксировано, то ΔJ представляет функционал от h.

Дифференциалом, или ***вариацией***, δJ функционала J называют главную линейную часть приращения ΔJ функционала J, т. е. линейный функционал $\varphi(h)$, отличающийся ΔJ на бесконечно малую величину

$$\Delta J(h)=\varphi(h)+\alpha\|h\|\text{, где } \alpha\to 0\text{, когда } \|h\|\to 0.$$

Говорят, что функционал $J[y]$ достигает экстремума при $y=y_0$, если $J[y]-J[y_0]$ сохраняет знак в некоторой окрестности кривой y_0.

Функционал $J[y]$ достигает при $y = y_0$ ***слабого экстремума***, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $J[y] - J[y_0]$ сохраняет постоянный знак для всех тех *y* из C^1, для которых функционал $J[y]$ определен и $\|y - y_0\| < \varepsilon$ (в смысле нормы пространства C^1).

Функционал $J[y]$ достигает при $y = y_0$ ***сильного экстремума***, если существует такое $\varepsilon > 0$, что $J[y] - J[y_0]$ сохраняет постоянный знак для всех тех *y* из *C*, для которых функционал $J[y]$ определен и $\|y - y_0\| < \varepsilon$ (в смысле нормы пространства *C*).

Теорема 2.1. Для того чтобы функционал $J[y]$ при $y = y_0$ достигал экстремума, необходимо, чтобы его дифференциал (если он существует) обращался в нуль при $y = y_0$, т. е. $\delta J = 0$ при $y = y_0$.

§ 3. Простейшая задача вариационного исчисления. Уравнение Эйлера

Постановка задачи:

пусть $F(x, y, z)$ – функция, имеющая непрерывные частные производные по всем переменным до второго порядка включительно. Среди всех функций $y(x)$, имеющих непрерывную производную и удовлетворяющих условиям

$$y(a) = A, \; y(b) = B, \tag{3.1}$$

требуется найти ту функцию, которая доставляет слабый экстремум функционалу

$$J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx. \tag{3.2}$$

Иначе говоря, ***простейшая задача вариационного исчисления*** состоит в отыскании слабого экстремума функционала вида (3.2) на множестве всех гладких кривых, соединяющих две данные точки.

Дадим функции $y(x)$ некоторое приращение $h(x)$. Для того, чтобы функция $y(x)+h(x)$ удовлетворяла граничным условиям (3.1), нужно, чтобы $h(a)=h(b)=0$.

Формула для вычисления дифференциала (вариации) функционала (3.2) имеет вид

$$\delta J = \int_a^b \left[F'_y(x,y,y')h + F'_{y'}(x,y,y')h'\right]dx . \tag{3.3}$$

По теореме необходимым условием экстремума является равенство

$$\int_a^b \left[F'_y h + F'_{y'} h'\right]dx = 0 . \tag{3.4}$$

По лемме 2.2 из (3.4) следует

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0 . \tag{3.5}$$

Это ***уравнение Эйлера***.

Теорема 3.1. Для того, чтобы функционал

$$J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx ,$$

определенный на множестве функций $y = y(x)$, имеющих непрерывную первую производную и удовлетворяющих условиям $y(a)=A$, $y(b)=B$, достигал на данной функции $y(x)$ экстремума, необходимо, чтобы эта функция удовлетворяла уравнению Эйлера

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0 .$$

Уравнение Эйлера представляет собой дифференциальное уравнение второго порядка. Интегральные кривые этого уравнения называются ***экстремалями***.

Сформулируем условия, при которых можно гарантировать существование второй производной функции $y = y(x)$, представляющей собой решение уравнения Эйлера.

Теорема 3.2. Пусть $y = y(x)$ – решение уравнения Эйлера

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0 .$$

Если функция $F(x, y, y')$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно, то во всех точках (x, y), в которых $F''_{y'y'}(x, y(x), y'(x)) \neq 0$, функция $y = y(x)$ имеет непрерывную вторую производную.

Из теоремы следует, что экстремаль $y = y(x)$ может иметь излом в тех точках, где $F''_{y'y'} = 0$.

Укажем некоторые частные случаи уравнения Эйлера.

1. Подынтегральная функция не зависит от *y*. Функционал

$$J[y] = \int_a^b F(x, y') dx .$$

Уравнение Эйлера принимает вид

$$F'_{y'} = C .$$

2. Подынтегральная функция не зависит от *x*. Функционал

$$J[y] = \int_a^b F(y, y') dx .$$

В этом случае уравнение Эйлера имеет вид

$$F - y' F'_{y'} = C .$$

3. Подынтегральная функция не зависит от y'. Функционал

$$J[y] = \int_a^b F(x, y) dx .$$

Уравнение Эйлера

$$F'_y(x, y) = 0 .$$

4. Функционалы вида

$$J[y]=\int_a^b v(x,y)\sqrt{1+y'^2}\,dx .$$

Уравнение Эйлера

$$v'_y - v'_x y' - v\frac{y''}{1+y'^2}=0 .$$

П р и м е р. Исследовать на экстремум функционал

$$J[y]=\int_1^2 \frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}dx,\ \ y(1)=0,\ \ y(2)=1 .$$

Подынтегральная функция не содержит y, поэтому уравнение Эйлера имеет вид $F'_{y'}=C$.

$$\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}}=C ,$$

$$y'=Cx\sqrt{1+y'^2} ,$$

$$y'^2=C^2x^2+C^2x^2y'^2 ,$$

$$y'^2\left(1-C^2x^2\right)=C^2x^2 ,$$

$$y'=\frac{Cx}{\sqrt{1-C^2x^2}} ,$$

$$y=\int\frac{Cx}{\sqrt{1-C^2x^2}}dx=-\frac{1}{2C}\int\frac{d\left(1-C^2x^2\right)}{\sqrt{1-C^2x^2}}=\frac{1}{C}\sqrt{1-C^2x^2}+C_1 ,$$

$$C(y-C_1)=\sqrt{1-C^2x^2} ,$$

$$C^2(y-C_1)^2=1-C^2x^2 ,$$

$$x^2+(y-C_1)^2=\frac{1}{C^2} .$$

Экстремалями являются окружности с центром в точке $(0, C_1)$ радиуса $\frac{1}{C}$. Подставим в полученное уравнение граничные условия

$$\begin{cases} C_1^2 + 1 = \dfrac{1}{C^2}, \\ (1 - C_1)^2 + 4 = \dfrac{1}{C^2}. \end{cases} \quad \begin{cases} C = \dfrac{1}{\sqrt{5}}, \\ C_1 = 2. \end{cases}$$

Искомое уравнение окружности $x^2 + (y-2)^2 = 5$.

§ 4. Достаточное условие экстремума в задаче с закрепленными концами

Рассмотрим задачу с закрепленными концами: найти минимум функционала $J[y] = \int\limits_a^b F(x, y, y')dx$ при условии, что $y(a) = A$, $y(b) = B$. Необходимое условие экстремума было получено в § 3. Получим достаточное условие минимума (достаточное условие максимума получается аналогично).

Пусть на функции $y = \bar{y}(x)$ достигается минимум функционала $J[y]$, $\bar{y}(a) = A$, $\bar{y}(b) = B$. Это означает, что $J[\tilde{y}] - J[\bar{y}] \geq 0$ для всех $\tilde{y}(x)$ в окрестности $\bar{y}(x)$ таких, что $\tilde{y}(a) = A$, $\tilde{y}(b) = B$. Функционал $J[\tilde{y}]$ может рассматриваться как криволинейный интеграл второго рода

$$J[\tilde{y}] = \int\limits_a^b F(x, \tilde{y}, \tilde{y}')dx = \int\limits_{\tilde{C}} F(x, y, y')dx$$

по кривой $\tilde{C} = \{(x, y) : y = \tilde{y}(x), x \in [a, b]\}$. Введем кривую

$$\overline{C} = \{(x, y) : y = \bar{y}(x), x \in [a, b]\}$$

и обозначим $I(\tilde{C}) = J[\tilde{y}]$, $I(\overline{C}) = J[\bar{y}]$.

Нужно оценить знак выражения

$$I(\widetilde{C})-I(\overline{C})=\int\limits_{\widetilde{C}}F(x,y,y')dx-\int\limits_{\overline{C}}F(x,y,y')dx,$$

точнее получить условия, при которых это выражение неотрицательно.

Пусть область G на плоскости (x,y) содержит кривую, заданную функцией $\overline{y}(x)$. Если через каждую точку области G проходит и притом единственная кривая, заданная функцией, являющейся решением уравнения Эйлера, то говорят, что множество таких экстремалей образует ***собственное поле***.

Поле экстремалей называется ***центральным***, если выполнены те же условия, но все экстремали пересекаются в одной точке ((a,A) или (b,B)).

В обоих случаях можно однозначно определить функцию $p(x,y)$ – производную в точке x той экстремали $y(x)$, которая проходит через точку (x,y). В случае центрального поля функция $p(x,y)$ определена везде в области G, кроме точки пересечения экстремалей.

Будем считать, что функция $y=\overline{y}(x)$ содержится в центральном или собственном поле экстремалей.

Путем преобразований выражение $I(\widetilde{C})-I(\overline{C})$ может быть представлено в виде

$$\Delta J=I(\widetilde{C})-I(\overline{C})=\int\limits_{\widetilde{C}}\left(F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)F_p(x,y,p)\right)dx.$$

Определим ***функцию Вейерштрасса***

$$E(x,y,y',p)\equiv F(x,y,y')-F(x,y,p)-(y'-p)F_p(x,y,p).$$

Достаточное условие минимума: $E\geq 0$ в окрестности $\overline{y}(x)$. В зависимости от того, какая выбирается окрестность – слабая или сильная, получим слабый или сильный минимум.

Сформулируем еще раз достаточное условие сильного (слабого) минимума:

1) $y = \bar{y}(x)$ удовлетворяет уравнению Эйлера;

2) $y = \bar{y}(x)$ может быть включена в собственное или центральное поле экстремалей;

3) $E(x, y, y', p) \geq 0$ в сильной (слабой) окрестности $y = \bar{y}(x)$.

В случае сильного (слабого) максимума достаточно выполнение условия $E \leq 0$.

§ 5. Случай нескольких переменных

Ранее рассматривали функционалы, зависящие от функции одного переменного, т. е. от линий. Рассмотрим функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных, т. е. от поверхностей, в частности, случай двух независимых переменных.

Рассмотрим функционал вида

$$J[z] = \iint\limits_G F\left(x, y, z, z_x, z_y\right) dx\, dy\,, \tag{5.1}$$

где z_x, z_y – частные производные функции $z = z(x, y)$, и предположим, что ищется функция $z(x, y)$, непрерывная вместе со своими производными до второго порядка в области G, принимающая на границе этой области заданные значения и дающая экстремум функционалу (5.1).

Необходимым условием экстремума функционала (5.1) является обращение в нуль его дифференциала.

Для установления необходимых условий экстремума функционала (5.1) сформулируем лемму, аналогичную лемме 2.1.

Лемма 5.1. Если $f(s,t)$ – фиксированная функция, непрерывная в области G, и интеграл

$$\iint\limits_G f(s,t)\, \eta(s,t)\, ds\, dt \tag{5.2}$$

обращается в нуль для всякой функции $\eta(s,t)$, непрерывной вместе со своими частными производными первого порядка и обращающейся в нуль на границе L области G, то $f(s,t) = 0$ во всей области G.

Дадим функции $z(x,y)$ некоторое приращение $h(x,y)$. Если $h(x,y)$ – произвольная дважды непрерывно дифференцируемая функция, обращающаяся в нуль на границе области G, то вместе с $z(x,y)$ области определения функционала (5.1) принадлежит $z(x,y)+h(x,y)$.

Выражение для ***вариации функционала*** $J[z]$ имеет вид

$$\delta J=\iint\limits_{G}\left(F'_z-\frac{\partial}{\partial x}F'_{z_x}-\frac{\partial}{\partial y}F'_{z_y}\right)h(x,y)\,dx\,dy\,. \qquad (5.3)$$

Для того, чтобы поверхность $z=z(x,y)$ доставляла экстремум, необходимо, чтобы двойной интеграл (5.3) обращался в нуль для любой функции $h(x,y)$, удовлетворяющей указанным выше условиям; по лемме отсюда следует соответствующее ***уравнение Эйлера***

$$F'_z-\frac{\partial}{\partial x}F'_{z_x}-\frac{\partial}{\partial y}F'_{z_y}=0\,. \qquad (5.4)$$

Уравнение представляет собой уравнение второго порядка в частных производных, причем ищется его решение, принимающее на контуре L заданные значения.

§ 6. Задача со свободными концами

Постановка задачи:

пусть $F(x,y,z)$ – функция, имеющая непрерывные частные производные по всем переменным до второго порядка включительно. Среди всех кривых $y(x)$, концы которых лежат на двух заданных вертикальных прямых $x=a$, $x=b$, найти ту, которая доставляет экстремум функционалу

$$J[y]=\int\limits_a^b F(x,y(x),y'(x))\,dx\,. \qquad (6.1)$$

Вариация вычисляется по формуле

$$\delta J=\int\limits_a^b\left(F'_y h+F'_{y'}h'\right)dx\,.$$

В отличие от задачи с закрепленными концами, функция $h(x)$ не обязательно обращается в нуль в точках a и b. Проинтегрируем последнее равенство по частям. Получим

$$\delta J = \int_a^b \left[F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} \right] h(x)dx + F'_{y'}\Big|_{x=b} \cdot h(b) - F'_{y'}\Big|_{x=a} \cdot h(a). \quad (6.2)$$

Если для функции $h(x)$ выполняется $h(a) = h(b) = 0$, то как в простейшей задаче, из условия $\delta J = 0$ следует

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0. \quad (6.3)$$

Итак, для того чтобы кривая $y = y(x)$ могла быть решением задачи со свободными концами, она должна быть экстремалью, т. е. решением уравнения Эйлера (6.3).

Пусть $y = y(x)$ – экстремаль. Тогда в выражении (6.2) для δJ интегральное слагаемое исчезает и условие $\delta J = 0$ принимает вид

$$F'_{y'}\Big|_{x=b} \cdot h(b) - F'_{y'}\Big|_{x=a} \cdot h(a) = 0,$$

но так как $h(x)$ – произвольная функция, то

$$F'_{y'}\Big|_{x=b} = 0, \; F'_{y'}\Big|_{x=a} = 0. \quad (6.4)$$

Таким образом, для решения поставленной задачи нужно найти общий интеграл уравнения Эйлера (6.3) и затем определить значения произвольных постоянных из условий (6.4).

Наряду с закрепленными и свободными концами можно рассматривать смешанный случай, т. е. считать, что один конец закреплен, а другой свободен. Пусть, например, ищется экстремум функционала $J[y] = \int_a^b F(x, y(x), y'(x))dx$ на классе кривых, соединяющих данную точку A (с абсциссой a) и произвольную точку прямой $x = b$. В этом случае на концах должны выполняться условия

$$y(a) = A, \; F'_{y'}\Big|_{x=b} = 0.$$

Если граничная точка (x_1, y_1) может перемещаться по горизонтальной прямой $y = y_1$, то должно выполняться условие

$$\left[F - y' F'_{y'}\right]_{x=x_1} = 0 . \qquad (6.5)$$

Если граничная точка (x_1, y_1) может перемещаться по некоторой кривой $y_1 = \varphi(x_1)$, то должно выполняться условие

$$\left[F + (\varphi' - y') F'_{y'}\right]_{x=x_1} = 0 . \qquad (6.6)$$

Это условие устанавливает зависимость между угловыми коэффициентами φ' и y' в граничной точке.

Условия (6.4)–(6.6) называются ***условиями трансверсальности***.

§ 7. Условный экстремум

1. Изопериметрическая задача. Пусть даны две функции $F(x, y, y')$ и $G(x, y, y')$. Изопериметрическая задача ставится так:

среди всех кривых $y = y(x) \in C^1[a,b]$, вдоль которых функционал

$$K[y] = \int_a^b G(x, y, y')dx$$

принимает заданное значение l, определить ту, для которой функционал

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

принимает экстремальное значение.

Относительно функций F и G предполагаем, что они имеют непрерывные частные производные первого и второго порядков при $a \le x \le b$ и при произвольных значениях переменных y, y'.

Теорема Эйлера. Если кривая $y = y(x)$ дает экстремум функционалу

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx$$

при условиях

$$K[y]=\int_a^b G(x,y,y')dx=l\,,\;\; y(a)=A\,,\;\; y(b)=B\,,$$

и если $y = y(x)$ не является экстремалью функционала K, то существует константа λ такая, что кривая $y = y(x)$ есть экстремаль функционала

$$L=\int_a^b [F(x,y,y')+\lambda G(x,y,y')]dx\,.$$

Закон взаимности изопериметрических задач. Экстремали функционала

$$J[y]=\int_a^b F(x,y,y')dx$$

при дополнительном условии

$$K[y]=\int_a^b G(x,y,y')dx=\text{const}$$

совпадают с экстремалями функционала $K[y]$ при условии $J[y]=\text{const}$.

Изопериметрическими задачами называют также такие вариационные задачи, в которых требуется определить экстремум функционала

$$J[y]=\int_a^b F(x,y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_n')dx \tag{7.1}$$

при наличии так называемых изопериметрических условий

$$K[y]=\int_a^b G(x,y_1,\ldots,y_n,y_1',\ldots,y_n')dx=l_i\,,\;\; i=1,\ldots,m\,, \tag{7.2}$$

где l_i – постоянные.

Для получения основного необходимого условия в изопериметрической задаче о нахождении экстремума функционала (7.1) при наличии условий (7.2) надо составить вспомогательный функционал

$$\Phi[y]=\int_a^b\left(F+\sum_{i=1}^m\lambda_i G_i\right)dx,$$

где l_i – постоянные, и написать для него уравнения Эйлера. Произвольные постоянные $C_1, C_2, \dots, C_{2n}$ в общем решении системы уравнений Эйлера и постоянные $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ определяются из граничных условий

$$y_k(a)=A_k, \quad y_k(b)=B_k, \; k=1,\dots,n,$$

и из изопериметрических условий

$$\int_a^b G_i\,dx=l_i, \; (i=1,\dots,m).$$

2. Задача Лагранжа при наличии связей. Вариационной задачей на условный экстремум является также задача Лагранжа нахождения экстремума функционала $J[y_1,\dots,y_n]$ при условии, что на функции, от которых зависит функционал *J,* наложены некоторые связи.

Задача ставится так: найти экстремум функционала

$$J[y]=\int_a^b F(x, y_1,\dots,y_n,y_1',\dots,y_n')dx,$$

$$y_k(a)=A_k, \quad y_k(b)=B_k, \; k=1,\dots,n, \tag{7.3}$$

при наличии условий

$$\varphi_i(x, y_1,\dots,y_n)=0 \;\; i=1,\dots,m; \quad m<n, \tag{7.4}$$

которые считаются независимыми.

Теорема. Функции $y_1, y_2, \dots, y_n$, реализующие экстремум функционала (7.3) при наличии условий (7.4), удовлетворяют при соответствующем выборе множителей $\lambda_i(x)$ (i = 1, 2, ..., m) уравнениям Эйлера, составленным для функционала

$$J^*=\int_a^b\left(F+\sum_{i=1}^m\lambda_i\varphi_i\right)dx.$$

Обозначим для краткости

$$F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i=\Phi(x,y_1,\dots,y_n).$$

Тогда функции $\lambda_i(x)$ и $y_i(x)$ определяются из уравнений Эйлера

$$\Phi'_{y_j}-\frac{d}{dx}\Phi'_{y_j}=0;\ j=1,\dots,n;$$

и уравнений

$$\varphi_i(x,y_1,\dots,y_n)=0;\ i=1,\dots,m.$$

Уравнения $\varphi_i=0$ можно считать уравнениями Эйлера для функционала *J**, если аргументами функционала считать не только функции $y_1,y_2,\dots,y_n$, но и функции $\lambda_1(x),\lambda_2(x),\dots,\lambda_m(x)$.

3. Геодезические линии. Пусть поверхность задана векторным уравнением

$$r=r(u,v).$$

Геодезической линией называется линия наименьшей длины, лежащая на данной поверхности и соединяющая две данные точки поверхности.

Уравнения геодезических линий можно получить как уравнения Эйлера, соответствующие вариационной задаче о нахождении кратчайшего расстояния на поверхности между ее двумя заданными точками.

Кривая, лежащая на поверхности $r=r(u,v)$, может быть задана параметрическими уравнениями

$$u=u(t),\quad v=v(t).$$

Длина ее отрезка между точками, соответствующим значениям t_0 и t_1 параметра t, равна

$$J[u,v]=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}\,dt, \qquad (7.5)$$

где E, F, G – коэффициенты первой квадратичной формы поверхности, т. е.

$$E=\left(\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial u}\right),\quad F=\left(\frac{\partial r}{\partial u},\frac{\partial r}{\partial v}\right),\quad G=\left(\frac{\partial r}{\partial v},\frac{\partial r}{\partial v}\right).$$

Здесь (c, d) – скалярное произведение векторов c и d.

Для функционала (7.5) система уравнений Эйлера имеет вид

$$\begin{cases}\dfrac{E_u u'^2+2F_u u'v'+G_u v'^2}{\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{2(Eu'+Fv')}{\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}}=0,\\[2ex] \dfrac{E_v u'^2+2F_v u'v'+G_v v'^2}{\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}}-\dfrac{d}{dt}\dfrac{2(Eu'+Gv')}{\sqrt{Eu'^2+2Fu'v'+Gv'^2}}=0.\end{cases}$$

Упражнения к разделу 1

1. Вычислить функционал $J[y]=\int\limits_0^1 [y(x)]^2 dx$, если $y_1(x)=x$, $y_2(x)=e^x$, $y_3(x)=\sqrt{1+x^2}$.

2. Найти расстояние между функциями $y=x^2$ и $y=x$ в классе $C[0,1]$.

3. Найти расстояние между функциями $y=xe^{-x}$ и $y=0$ в классе $C[0,2]$.

4. Найти расстояние между функциями $y=x$ и $y=\ln x$ в классе $C^1\left[e^{-1},e\right]$.

5. Найти приращение функционала $J[y]=\int\limits_0^3 y^2 y' dx$, если $y(x)=x^2$, $y_1(x)=x^3$.

6. Найти вариацию функционала $J[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1} yy' dx$, если $y(x), \delta y\in C^1[x_0,x_1]$.

7. Найти приращение и вариацию функционала $J[y]=\int\limits_1^e\left(yy'+xy'^2\right)dx$, если $y=\ln x$, $\delta y=\dfrac{\alpha(x-1)}{e-1}$.

Исследовать на экстремум функционалы.

8. $J[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\left(y'^2-y^2\right)dx;\quad y(0)=0,\quad y\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1.$

9. $J[y]=\int\limits_0^1\left(y'^2+12xy\right)dx;\quad y(0)=0,\quad y(1)=1.$

10. $J[y]=\int\limits_a^b\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx.$

11. $J[y]=\int\limits_a^b\left(y'^2+2yy'-16y^2\right)dx.$

12. $J[y]=\int\limits_a^b\left(xy'+y'^2\right)dx.$

13. $J[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(y^2+2xyy'\right)dx;\quad y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1.$

14. $J[y]=\int\limits_0^1\left(xy+y^2-2y^2y'\right)dx;\quad y(0)=1,\quad y(1)=2.$

15. $J[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1}y'\left(1+x^2y'\right)dx.$

16. $J[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1}\left(y^2+y'^2-2y\sin x\right)dx.$

17. $J[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1}\sqrt{y\left(1+y'^2\right)}dx.$

18. $J[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1}e^y(1+xy')dx;\quad y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1.$

19. $J[y]=\int\limits_0^1 y'^2\,dx;\quad y(0)=0,\quad y(1)=1.$

20. $J[y]=\int\limits_0^1\left(xy'-y'^2\right)dx;\quad y(0)=1,\quad y(1)=\frac{1}{4}.$

21. $J[y]=\int\limits_0^{\ln 2}\left(y'^2+2y^2+2y\right)e^{-x}\,dx;\quad y(0)=y(\ln 2)=0.$

22. Найти функцию, на которой может достигаться экстремум функционала

$$J[y]=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\left(y^2-y'^2\right)dx;\quad y(0)=0,$$

а другая граничная точка может скользить по прямой $x=\frac{\pi}{4}$.

23. Найти кривую, на которой может достигаться экстремум функционала

$$J[y]=\int\limits_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}dx,\quad y(0)=0,$$

если вторая граничная точка (x_1,y_1) может перемещаться по окружности

$$(x-9)^2+y^2=9\,.$$

24. Найти условие трансверсальности для функционалов вида

$$J[y]=\int\limits_{x_0}^{x_1}A(x,y)\sqrt{\left(1+y'^2\right)}dx.$$

Р а з д е л 2. Общие сведения теории интегральных уравнений

§ 1. Уравнения Фредгольма и Вольтерра

Теория интегральных уравнений, т. е. уравнений, в которых искомая функция находится под знаком интеграла, составляет значительный отдел математического анализа и имеет большое теоретическое и прикладное значение.

Интегральное уравнение

$$\int_a^b K(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi = f(x),\ (a \le x \le b)$$

с искомой функцией $u(x)$ называется ***уравнением Фредгольма I рода***.

Интегральное уравнение

$$u(x) = \int_a^b K(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi + f(x)$$

с искомой функцией $u(x)$ называется ***уравнением Фредгольма II рода***.

Здесь неизвестная функция $u(x)$ зависит от действительной переменной *x*, которая меняется в том же промежутке $[a,b]$, что и переменная интегрирования ξ; это требование относится ко всем без исключения классам интегральных уравнений, которые будут рассмотрены. Промежуток $[a,b]$ может быть конечным или бесконечным. Функции $K(x,\xi)$ и $f(x)$ предполагаются данными и определенными почти всюду соответственно в квадрате $a \le x \le b$, $a \le \xi \le b$ и в промежутке $a \le x \le b$; функция $K(x,\xi)$ называется ***ядром*** интегрального уравнения, функция $f(x)$ – ***свободным членом*** этого уравнения. Предполагается, что ядро $K(x,\xi)$ уравнения Фредгольма удовлетворяет неравенству

$$\int_a^b\int_a^b \left|K(x,\xi)\right|^2 dx\,d\xi < \infty;$$

свободный член уравнения Фредгольма удовлетворяет неравенству

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty .$$

Интегральное уравнение

$$\int_a^x K(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi = f(x), \ (a \le x \le b)$$

с искомой функцией $u(x)$ называется ***уравнением Вольтерра I рода***.

Интегральное уравнение

$$u(x) = \int_a^x K(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi + f(x).$$

с искомой функцией $u(x)$ называется ***уравнением Вольтерра II рода***.

Это линейные неоднородные уравнения; если $f(x) \equiv 0$, получаются соответствующие однородные уравнения.

Иногда рассматривается более общее уравнение

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi + f(x).$$

Это уравнение называется ***линейным интегральным уравнением II рода с параметром*** λ.

Линейные интегральные уравнения I и II рода представляют собой частные случаи линейного интегрального уравнения III рода

$$\varphi(x)\, u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi .$$

Уравнение I рода получается, если $\varphi(x) \equiv 0$; уравнение II рода получается, если $\varphi(x) \equiv 1$.

П р и м е р. К уравнению Фредгольма I рода приводят задачи гравиразведки полезных ископаемых. Пусть в слое $z \ge h$, где z – глубина под поверхностью Земли, расположены источники аномального гравитационного поля, при $0 < z < h$ их нет. И пусть $V(x)$ – потенциал гравитационного поля при $z = h$; x – горизонтальная координата. Тогда потенциал поля $u(x,z)$ в области $0 < z < h$ является гармонической функцией

$$\Delta u(x,z) = 0,$$
$$u(x,h) = V(x),$$
$$(0 < z < h, \quad -\infty < x < +\infty).$$

Решение такой задачи дается интегральной формулой Пуассона

$$u(x,z) = \frac{h}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{V(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^2 + (z-h)^2}.$$

На поверхности Земли, т. е. при $z = 0$, величина $u(x,0)$ может быть измерена $u(x,0) = f(x)$. Тогда для определения $V(x)$ получаем уравнение Фредгольма I рода

$$\frac{h}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{V(\xi)\,d\xi}{(x-\xi)^2 + h^2} = f(x).$$

§ 2. Связь между линейными дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями типа Вольтерра

Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_n(x)y = \varphi(x), \qquad (2.1)$$

причем будем предполагать, что при $x = 0$ функции $a_i(x)$ не имеют особенностей. Сделаем подстановку

$$\frac{d^n y}{dx^n} = u(x).$$

Тогда

$$
\begin{cases}
\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int\limits_0^x u(x)\,dx + C_1, \\
\dfrac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} = \int\limits_0^x u(x)\,dx^2 + C_1 x + C_2, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
y = \int\limits_0^x u(x)\,dx^n + C_1 \dfrac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \dfrac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_n,
\end{cases} \tag{2.2}
$$

где $\int\limits_0^x u(x)\,dx^n$ обозначает n-кратный интеграл от функции $u(x)$. Подставляя равенства (2.2) в уравнение (2.1), получим:

$$
u(x) + a_1(x)\int\limits_0^x u(x)\,dx + \ldots + a_n(x)\int\limits_0^x u(x)\,dx^n = \varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i \alpha_i(x), \tag{2.3}
$$

где

$$
\alpha_i(x) = a_i(x) + \frac{x}{1} a_{i+1}(x) + \ldots + \frac{x^{n-i}}{(n-i)!} a_n(x).
$$

Если обозначим

$$
\varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} C_i \alpha_i(x) = f(x)
$$

и применим формулу

$$
\int\limits_0^x u(t)\,dt^n = \int\limits_0^x \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} u(t)\,dt,
$$

то уравнение (2.3) примет вид

$$
u(x) + \int\limits_0^x \left[a_1(x) + a_2(x)(x-t) + \ldots + a_n(x)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} \right] u(t)\,dt = f(x),
$$

что представляет интегральное уравнение типа Вольтерра II рода. Для того, чтобы правая часть уравнения (2.3) имела определенное значение, необходимо, чтобы имели определенное значение все коэффициенты C_i.

Обратно, решение уравнения Вольтерра (2.3) будет эквивалентно решению задачи Коши для линейного дифференциального уравнения (2.1). Единственность решения уравнения Вольтерра следует из того, что задача Коши допускает в точках, не имеющих особенностей, одно и только одно решение.

§ 3. Уравнение Вольтера I рода

Рассмотрим уравнение

$$\int_a^x K(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi = f(x). \tag{3.1}$$

Для его разрешимости необходимо условие $f(a)=0$. Допустим, что ядро $K(x,\xi)$, в котором считается $a \le \xi \le x$, непрерывно на диагонали $\xi = x$, и продифференцируем обе части (3.1) по x. Это приведет к уравнению

$$K(x,x)\,u(x) + \int_a^x K'_x(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi = f'(x), \tag{3.2}$$

которое при условии $f(a)=0$ равносильно (3.1). Если $K(x,x) \ne 0$, то разделив обе части (3.2) на $K(x,x)$, приходим к уравнению Вольтерра II рода. Если $K(x,x) \equiv 0$, то необходимо проделать описанную процедуру еще раз.

Рассмотрим уравнение, у которого ядро обращается в бесконечность на диагонали $\xi = x$

$$\int_a^x \frac{H(x,\xi)}{(x-\xi)^\alpha} u(\xi)\,d\xi = f(x), \quad 0 < \alpha < 1, \tag{3.3}$$

где функция $H(x,\xi)$ конечна на диагонали. Это уравнение приводится к равносильному уравнению

$$\int_a^x \left[\int_\xi^x \frac{H(s,\xi)}{(s-\xi)^\alpha (x-s)^{1-\alpha}}\,ds \right] u(\xi)\,d\xi = \int_a^x \frac{f(s)}{(x-s)^{1-\alpha}}\,ds. \tag{3.4}$$

Заменим в ядре уравнения (3.4) переменную интегрирования по формуле

$$s = \xi + (x-\xi)t\,,$$

получаем, что ядро равно

$$\int_0^1 \frac{H(\xi + (x-\xi)t, \xi)}{t^{\alpha}(1-t)^{1-\alpha}}\,dt\,,$$

и на диагонали, т. е. при $\xi = x$, принимает конечное значение

$$H(\xi,\xi)\int_0^1 t^{-\alpha}(1-t)^{\alpha-1}\,dt = H(\xi,\xi)\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1)} = \frac{\pi}{\sin\pi\alpha}H(\xi,\xi)\,.$$

Поэтому к уравнению (3.4) можно применить описанный выше метод дифференцирования.

Интегральное уравнение называется ***особым***, если один или два предела интегрирования бесконечны, например,

$$u(x) = f(x) + \lambda\int_0^{\infty} \sin x\xi\, u(\xi)\, d\xi\,,$$

либо ядро обращается в бесконечность в одной или нескольких точках рассматриваемого интервала, например,

$$f(x) = \int_0^x \frac{H(x,\xi)}{(x-\xi)^{\alpha}}u(\xi)\,d\xi, \qquad (0<\alpha<1).$$

§ 4. Некоторые специальные классы уравнений. Уравнения с ядром, зависящим от разности аргументов

Многие задачи математической физики приводят к интегральным уравнениям, в которых ядро зависит от разности аргументов

$$K(x,\xi) = K(x-\xi)\,.$$

При решении таких уравнений часто бывает целесообразно использовать преобразования Лапласа и Фурье.

Для функции $f(x)$, удовлетворяющей условиям Дирихле на любом конечном интервале и абсолютно интегрируемой на всей числовой оси, имеют место

$$F(\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\lambda x} f(x)\,dx$$ – ***прямое преобразование Фурье***,

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\lambda x} F(\lambda)\,d\lambda$$ – ***формула обращения Фурье***.

Пусть $f(t)$ принадлежит к классу функций, для которых интеграл $\int_0^{\infty} |f(t)|\, e^{-\eta t}\, dt$ сходится, если η выбрано достаточно большим положительным. Имеют место

$$F(p)=\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)\,dt$$ – ***прямое преобразование Лапласа***,

$$f(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{s-i\infty}^{s+i\infty} e^{pt} F(p)\,dp$$ – ***обратное преобразование Лапласа***.

Уравнение Вольтерра с разностным ядром

Уравнение

$$\alpha u(x)+\int_a^x K(x-\xi)\,u(\xi)\,d\xi = f(x),\ (\alpha=\text{const}) \tag{4.1}$$

(при $\alpha \neq 0$ получается уравнение II рода, при $\alpha = 0$ – уравнение I рода) можно решить с помощью преобразования Лапласа. Запишем уравнение (4.1) в образах Лапласа

$$\alpha U(p)+\widetilde{K}(p)U(p)=F(p).$$

Выразим $U(p)$

$$U(p)=\frac{F(p)}{\alpha+\widetilde{K}(p)}. \tag{4.2}$$

Применив обратное преобразование Лапласа, получим решение уравнения (4.1) – функцию $u(x)$.

Так как функции $F(p)$ и $\widetilde{K}(p)$ аналитичны в некоторой полуплоскости $\operatorname{Re} p > \text{const}$ и стремятся там к нулю при $p \to \infty$, то при $\alpha \neq 0$ функция $U(p)$ удовлетворяет условию обратимости.

Если $\alpha = 0$, т. е. рассматривается уравнение I рода, то стремление правой части уравнения (4.2) к нулю при $p \to \infty$, $\operatorname{Re} p > \text{const}$, приходится дополнительно потребовать.

Если уравнение (4.1) решается лишь на конечном интервале $0 \le x \le x_0$, то можно функции $K(x)$ и $f(x)$ вне этого интервала продолжить произвольным образом, например, положить их равными нулю, после чего уже проводить преобразование Лапласа.

Уравнение Фредгольма с разностным ядром на оси

Уравнение имеет вид

$$u(x) = \lambda \int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)\, u(\xi)\, d\xi + f(x). \qquad (4.3)$$

Пусть функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ абсолютно интегрируемы на действительной оси. ***Свертка функций*** $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ определяется равенством

$$(\varphi * \psi)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, \psi(x-t)\, dt\,.$$

Предполагаем, что все функции в уравнении (4.3) абсолютно интегрируемы на действительной оси. Запишем уравнение в образах Фурье

$$\widetilde{u}(k) = 2\pi\lambda\, \widetilde{K}(k)\, \widetilde{u}(k) + \widetilde{f}(k),$$

$$\widetilde{u}(k) = \frac{\widetilde{f}(k)}{1 - 2\pi\lambda\, \widetilde{K}(k)}.$$

Применив обратное преобразование Фурье, получим решение уравнения (4.3) – функцию $u(x)$. Если $1-2\pi\lambda\,\widetilde{K}(k)$ имеет нули при действительных *k*, то уравнение (4.3) не имеет абсолютно интегрируемого на всей действительной оси *x* решения.

Описанный метод можно применить и к уравнению I рода

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(x-\xi)\,u(\xi)\,d\xi = f(x).$$

В образах Фурье оно примет вид

$$2\pi\,\widetilde{K}(k)\,\widetilde{u}(k) = \widetilde{f}(k)$$

$$\widetilde{u}(k) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\widetilde{f}(k)}{\widetilde{K}(k)}$$

Нужно дополнительно требовать, чтобы выражение $\dfrac{\widetilde{f}(k)}{\widetilde{K}(k)}$ допускало обратное преобразование Фурье, т. е. чтобы оно было абсолютно интегрируемым на всей оси *k*.

Кроме уравнений с разностными ядрами существуют уравнения с ***симметричным*** ядром, для которого $K(x,\xi)=K(\xi,x)$ в вещественном случае и $K(x,\xi)=K^*(\xi,x)$ в комплексном. В комплексном случае такие ядра называются ***эрмитовыми***.

Если ядро обращается в бесконечность, то обычно при $x=\xi$. Поэтому специально рассматривается класс ***уравнений со слабой особенностью***, для которых при конечных *a* и *b*

$$|K(x,\xi)| \le \frac{\mathrm{const}}{|x-\xi|^{\alpha}}, \quad (0<\alpha<1).$$

Если при этом $0<\alpha<\dfrac{1}{2}$, то выполняется условие $\int\limits_a^b\int\limits_a^b |K(x,\xi)|^2\,dx\,d\xi<\infty$.

Если $\alpha=1$, интегральные уравнения Фредгольма I и II рода называются ***сингулярными***, тогда интеграл надо понимать в смысле главного значения.

§ 5. Типы решений

Решение линейного интегрального уравнения II рода с параметром λ

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi + f(x)$$

может быть получено с помощью трех различных методов и в трех разных формах.

1. Метод последовательных подстановок, развитый Нейманом, Лиувиллем, Вольтерра, дает решение $u(x)$ в виде степенного ряда относительно λ, причем коэффициенты при различных степенях λ являются функциями от x. Ряд сходится при всех значениях λ, меньших по абсолютной величине, чем некоторое постоянное число.

2. Метод, принадлежащий Фредгольму, дает решение $u(x)$ в виде отношения двух целых рядов относительно λ, каждый из которых имеет бесконечный радиус сходимости. Коэффициенты при степенях в числителе являются функциями от x, знаменатель не зависит от x.

3. Метод, развитый Гильбертом и Шмидтом, выражает $u(x)$ через фундаментальные функции, которые представляют собой решения соответствующего однородного уравнения

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi\,.$$

Вообще, это уравнение имеет только тривиальное решение $u(x) \equiv 0$. Но существует ряд чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$, называемых ***характеристическими числами***, для каждого из которых однородное уравнение имеет конечные решения $u_1(x), u_2(x), \ldots, u_n(x), \ldots$. Это фундаментальные функции. Решение уравнения имеет вид

$$u(x) = \sum c_n\, u_n(x)\,,$$

где c_n – произвольные постоянные числа.

Упражнения к разделу 2

Составить интегральные уравнения, соответствующие дифференциальным уравнениям с заданными начальными условиями.

1. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

2. $\dfrac{d^2y}{dx^2} - 5\dfrac{dy}{dx} + 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = -1.$

3. $\dfrac{d^2y}{dx^2} + y = \cos x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1.$

4. $\dfrac{dy}{dx} - y = 0, \quad y(0) = 1.$

5. $\dfrac{d^3y}{dx^3} - 3\dfrac{d^2y}{dx^2} - 6\dfrac{dy}{dx} + 8y = 0, \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = 1.$

Решить интегральные уравнения с разностным ядром.

6. $u(x) = x + \int\limits_0^x (t - x)u(t)dt.$

7. $u(x) = 1 + \int\limits_0^x (t - x)u(t)dt.$

8. $u(x) = -2\cos x + x + 2 + \int\limits_0^x (t - x)u(t)dt.$

9. $u(x) = 29 + 6x + \int\limits_0^x (6x - 6t + 5)u(t)dt.$

10. $u(x) = f(x) + \lambda \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x-t|}u(t)dt \quad \left(\lambda < \dfrac{1}{2}\right)$, где $f(x) = \begin{cases} e^{-x}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$

Р а з д е л 3. Теория Фредгольма

§ 1. Решение интегральных уравнений II рода методом последовательных подстановок

Уравнение Фредгольма

Рассмотрим уравнение

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi, \tag{1.1}$$

где функция $K(x,\xi)\neq 0$ вещественна и непрерывна в прямоугольнике $R(a\le x\le b,\, a\le\xi\le b)$; функция $f(x)\neq 0$ вещественна и непрерывна в интервале $l(a\le x\le b)$, λ – постоянное число.

Подставляя в правую часть уравнения (1.1) вместо функции $u(\xi)$ ее значение, доставляемое этим же уравнением, находим:

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\left[f(\xi)+\lambda\int_a^b K(\xi,\xi_1)\,u(\xi_1)\,d\xi_1\right]d\xi=$$

$$=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)f(\xi)\,d\xi+\lambda^2\int_a^b K(x,\xi)\int_a^b K(\xi,\xi_1)\,u(\xi_1)\,d\xi_1\,d\xi.$$

Снова подставляя сюда вместо $u(\xi_1)$ его значение из уравнения (1.1) и продолжая описанную процедуру, приходим к рассмотрению бесконечного ряда:

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)f(\xi)\,d\xi+\lambda^2\int_a^b K(x,\xi)\int_a^b K(\xi,\xi_1)\,f(\xi_1)\,d\xi_1\,d\xi+$$

$$+\lambda^3\int_a^b K(x,\xi)\int_a^b K(\xi,\xi_1)\int_a^b K(\xi_1,\xi_2)f(\xi_2)\,d\xi_2\,d\xi_1\,d\xi+\ldots \tag{1.2}$$

По предположениям, сделанным о функциях $K(x,\xi)$ и $f(x)$, каждый член ряда (1.2) является функцией от x, непрерывной в интервале l. Значит, если ряд равномерно сходится в l, то он сам представляет в этом интервале некоторую непрерывную функцию.

Так как $K(x,\xi)$ и $f(x)$ непрерывны соответственно в R и l, то $|K(x,\xi)| \le M$ в R, $|f(x)| \le N$ в l.

Общий член ряда (1.2) имеет вид

$$S_n(x) = \lambda^n \int_a^b K(x,\xi) \int_a^b K(\xi,\xi_1) \ldots \int_a^b K(\xi_{n-2},\xi_{n-1}) f(\xi_{n-1})\, d\xi_{n-1} \cdots d\xi_1\, d\xi ,$$

тогда

$$|S_n(x)| \le |\lambda^n| N M^n (b-a)^n .$$

Ряд с таким общим членом сходится только, если

$$|\lambda| M(b-a) < 1 .$$

Таким образом, ряд (1.2) сходится абсолютно и равномерно для всех λ, удовлетворяющих неравенству

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} .$$

Теорема 1.1. Если

а) $u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi$, a, b – const;

б) ядро $K(x,\xi) \ne 0$ вещественно и непрерывно в R и $|K(x,\xi)| \le M$;

в) $f(x) \ne 0$ вещественна и непрерывна в l;

г) λ – const, $|\lambda| < \dfrac{1}{M(b-a)}$,

то уравнение (1.1) имеет одно и только одно решение в l, выражающееся абсолютно и равномерно сходящимся рядом (1.2).

Уравнение

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi$$

представляет частный случай уравнения (1.1) при $\lambda = 1$. Все рассуждения могут быть повторены без изменений.

Уравнение Вольтерра

Рассмотрим уравнение

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi\,. \qquad (1.3)$$

Подставляя в правую часть уравнения (1.3) вместо функции $u(\xi)$ ее значение, определяемое этим же уравнением, находим:

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,\xi)\left[f(\xi)+\lambda\int_a^\xi K(\xi,\xi_1)\,u(\xi_1)\,d\xi_1\right]d\xi=$$

$$=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,\xi)f(\xi)\,d\xi+\lambda^2\int_a^x K(x,\xi)\int_a^\xi K(\xi,\xi_1)\,u(\xi_1)\,d\xi_1\,d\xi.$$

Снова подставляя сюда вместо $u(\xi_1)$ его значение из уравнения (1.3) и продолжая описанную процедуру, приходим к рассмотрению бесконечного ряда

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^x K(x,\xi)f(\xi)\,d\xi+\lambda^2\int_a^x K(x,\xi)\int_a^\xi K(\xi,\xi_1)\,f(\xi_1)\,d\xi_1\,d\xi+$$

$$+\lambda^3\int_a^x K(x,\xi)\int_a^\xi K(\xi,\xi_1)\int_a^{\xi_1} K(\xi_1,\xi_2)f(\xi_2)\,d\xi_2\,d\xi_1\,d\xi+\ldots \qquad (1.4)$$

Общий член ряда (1.4) имеет вид

$$V_n(x)=\lambda^n\int_a^x K(x,\xi)\int_a^\xi K(\xi,\xi_1)\ldots\int_a^{\xi_{n-2}} K(\xi_{n-2},\xi_{n-1})f(\xi_{n-1})\,d\xi_{n-1}\cdots d\xi_1\,d\xi\,.$$

Так $|K(x,\xi)|\le M$ в R, $|f(x)|\le N$ в l,

то

$$|V_n(x)|\le|\lambda^n|NM^n\frac{(x-a)^n}{n!}\le|\lambda^n|NM^n\frac{(b-a)^n}{n!}\quad(a\le x\le b).$$

Ряд с положительным общим членом $\left|\lambda^n\right| N M^n \dfrac{(b-a)^n}{n!}$ сходится при всех λ, N, M, $(b-a)$. Поэтому ряд (1.4) сходится абсолютно и равномерно.

Теорема 1.2. Если

а) $u(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^x K(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi$, a – const;

б) ядро $K(x,\xi) \neq 0$ вещественно и непрерывно в R и $\left|K(x,\xi)\right| \leq M$;

в) $f(x) \neq 0$ вещественна и непрерывна в l;

г) λ – const,

то уравнение (1.3) имеет одно и только одно непрерывное решение $u(x)$, которое выражается абсолютно и равномерно сходящимся рядом (1.4).

Для уравнения

$$u(x) = f(x) + \int\limits_a^x K(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi, \ (\lambda = 1)$$

рассуждения аналогичны.

§ 2. Решение интегральных уравнений II рода методом последовательных приближений

Необходимо отметить, что метод последовательных приближений отличен от метода последовательных подстановок. При методе последовательных приближений мы выбираем какую-либо произвольную вещественную функцию $u_0(x)$, непрерывную в l. Подставляя в правую часть уравнения

$$u(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi$$

вместо $u(\xi)$ эту функцию $u_0(\xi)$, получим:

$$u_1(x) = f(x) + \lambda \int\limits_a^b K(x,\xi)\, u_0(\xi)\, d\xi .$$

Определенная таким образом функция $u_1(\xi)$ также вещественна и непрерывна в l. Продолжая, получим ряд функций:

$$u_0(\xi),\quad u_1(\xi),\quad u_2(\xi),\ldots,\quad u_n(\xi),\ldots,$$

которые будут удовлетворять уравнениям

$$\begin{cases} u_2(x) = f(x) + \lambda\int\limits_a^b K(x,\xi)\, u_1(\xi)\, d\xi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_{n-1}(x) = f(x) + \lambda\int\limits_a^b K(x,\xi)\, u_{n-2}(\xi)\, d\xi, \\ u_n(x) = f(x) + \lambda\int\limits_a^b K(x,\xi)\, u_{n-1}(\xi)\, d\xi. \end{cases}$$

Из этих уравнений находим

$$\begin{gathered} u_n(x) = f(x) + \lambda\int\limits_a^b K(x,\xi) f(\xi)\, d\xi + \lambda^2\int\limits_a^b K(x,\xi)\int\limits_a^b K(\xi,\xi_1)\, f(\xi_1)\, d\xi_1\, d\xi + \ldots + \\ + \lambda^{n-1}\int\limits_a^b K(x,\xi)\int\limits_a^b K(\xi,\xi_1)\ldots\int\limits_a^b K(\xi_{n-3},\xi_{n-2}) f(\xi_{n-2})\, d\xi_{n-2}\ldots d\xi_1\, d\xi + R_n(x), \end{gathered} \tag{2.1}$$

где $R_n(x) = \lambda^n\int\limits_a^b K(x,\xi)\int\limits_a^b K(\xi,\xi_1)\ldots\int\limits_a^b K(\xi_{n-2},\xi_{n-1})\, u_0(\xi_{n-1})\, d\xi_{n-1}\ldots d\xi_1\, d\xi$.

Функция $u_0(x)$ вещественна и непрерывна в l, значит она достигает в l некоторого наибольшего значения U. Значит,

$$|R_n| \le \left|\lambda^n\right| U\, M^n (b-a)^n .$$

Если $|\lambda|\, M(b-a) < 1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

Таким образом, с увеличением n функции $u_n(x)$ приближаются к предельной функции, равной сумме ряда, стоящего в правой части равенства (2.1). Но этот ряд совпадает с рядом, стоящим в правой части равенства (1.2). Следовательно

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) \equiv u(x).$$

В этом процессе последовательного приближения каждая новая функция $u_n(x)$ зависит от выбора начальной функции $u_0(x)$. Однако предельная функция $u(x)$ от выбора $u_0(x)$ не зависит.

Все рассуждения могут быть продолжены на уравнение Вольтерра.

Итерированные функции

Пусть

$$\begin{cases} K_1(x,\xi) = K(x,\xi), \\ K_i(x,\xi) = \int\limits_a^b K(x,s) K_{i-1}(s,\xi)\, ds. \end{cases} \tag{2.2}$$

Построенные таким образом функции $K_1, K_2, \ldots, K_n, \ldots$ называются ***итерированными функциями***.

Применяя последовательно формулы (2.2), получим:

$$K_i(x,\xi) = \int\limits_a^b \ldots \int\limits_a^b K(x,s_1) K(s_1,s_2) \ldots K(s_{i-1},\xi)\, ds_{i-1} \ldots ds_1 .$$

Можно показать, что

$$K_{n+p}(x,\xi) = \int\limits_a^b K_n(x,s) K_p(s,\xi)\, ds.$$

Взаимные функции

Пусть

$$-k(x,\xi) = K_1(x,\xi) + K_2(x,\xi) + \ldots + K_n(x,\xi) + \ldots \tag{2.3}$$

Легко показать, что если $K(x,\xi)$ действительно и непрерывно в R, то при $M(b-a) < 1$ этот ряд является абсолютно и равномерно сходящимся, следовательно, $k(x,\xi)$ действительно и непрерывно в R.

Имеет место равенство

$$K(x,\xi) + k(x,\xi) = \int\limits_a^b K(x,s) k(s,\xi) ds = \int\limits_a^b k(x,s) K(s,\xi) ds . \tag{2.4}$$

Две функции $K(x,\xi)$ и $k(x,\xi)$ называются ***взаимными***, если они обе действительны и непрерывны в R и удовлетворяют условию (2.4).

Теорема 2.1. Если $K(x,\xi)$ действительно и непрерывно в R и $M(b-a)<1$, где $|K(x,\xi)| \le M$ в R, то взаимная функция $k(x,\xi)$, представляемая формулой (2.3), существует.

§ 3. Решение уравнения Фредгольма, данное Вольтерра

Вольтерра показал, как найти решение уравнения

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi\,, \tag{3.1}$$

если известна функция $k(x,\xi)$, взаимная с $K(x,\xi)$. Если уравнение (3.1) имеет непрерывное решение $u(x)$, то

$$u(\xi) = f(\xi) + \int_a^b K(\xi,\xi_1)\, u(\xi_1)\, d\xi_1\,.$$

Умножая обе части равенства на $k(x,\xi)$ и интегрируя по ξ от a до b, получим:

$$\int_a^b k(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi + \int_a^b K(x,\xi_1)\, u(\xi_1)\, d\xi_1 = 0\,. \tag{3.2}$$

Из уравнения (3.1)

$$\int_a^b K(x,\xi_1)\, u(\xi_1)\, d\xi_1 = u(x) - f(x)\,.$$

Подставим в (3.2) это выражение вместо второго интеграла

$$u(x) = f(x) - \int_a^b k(x,\xi)\, f(\xi)\, d\xi\,. \tag{3.3}$$

Таким образом, если уравнение (3.1) имеет непрерывное решение, то оно является единственным и выражается формулой (3.3).

Теорема 3.1. Если

а) ядро $K(x,\xi)\neq 0$ вещественно и непрерывно в R;

в) $f(x)\neq 0$ вещественна и непрерывна в l;

г) функция $k(x,\xi)$, взаимная с $K(x,\xi)$, существует,

то уравнение (3.1) имеет одно и только одно непрерывное решение $u(x)$ в l и это решение выражается формулой (3.3).

§ 4. Уравнение Фредгольма как предел системы конечного числа линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим уравнение

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi. \tag{4.1}$$

Фредгольмом дано решение в форме

$$u(x)=\frac{\beta_0(x)+\beta_1(x)\lambda+\ldots}{\alpha_0+\alpha_1\lambda+\ldots},$$

где числитель и знаменатель – степенные ряды, сходящиеся при всех λ.

Составим систему линейных алгебраических уравнений, заменяющих интегральное. Интервал $(a;b)$ разделим на n равных частей, точки деления t_1, t_2, …, t_{n-1}.

$$t_0=a,\, t_1=a+h,\, t_2=a+2h,\ldots,t_n=a+nh,\, h=\frac{b-a}{n}.$$

Система уравнений имеет вид

$$\begin{cases} u(\xi_1)-\lambda h[K(\xi_1,\xi_1)u(\xi_1)+K(\xi_1,\xi_2)u(\xi_2)+\ldots+K(\xi_1,\xi_n)u(\xi_n)]=f(\xi_1),\\ u(\xi_2)-\lambda h[K(\xi_2,\xi_1)u(\xi_1)+K(\xi_2,\xi_2)u(\xi_2)+\ldots+K(\xi_2,\xi_n)u(\xi_n)]=f(\xi_2),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ u(\xi_n)-\lambda h[K(\xi_n,\xi_1)u(\xi_1)+K(\xi_n,\xi_2)u(\xi_2)+\ldots+K(\xi_n,\xi_n)u(\xi_n)]=f(\xi_n). \end{cases}$$

Будем обозначать $f(\xi_i)=f_i$, $u(\xi_i)=u_i$, $K(\xi_i,\xi_j)=K_{ij}$. Составим определитель из коэффициентов при u_i

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1-\lambda h K_{11} & -\lambda h K_{12} & \dots & -\lambda h K_{1n} \\ -\lambda h K_{21} & 1-\lambda h K_{22} & \dots & -\lambda h K_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\lambda h K_{n1} & -\lambda h K_{n2} & \dots & 1-\lambda h K_{nn} \end{vmatrix}$$

u_i можно вычислить по формуле Крамера в предположении, что $\Delta \neq 0$.

Детерминантом Фредгольма называется

$$\lim_{n\to\infty} \Delta = 1 - \lambda \int_a^b K(\xi,\xi)d\xi + \frac{\lambda^2}{2}\int_a^b\int_a^b \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} \\ K_{21} & K_{22} \end{vmatrix} d\xi_1\, d\xi_2 -$$

$$-\frac{\lambda^3}{3}\int_a^b\int_a^b\int_a^b \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{vmatrix} d\xi_1\, d\xi_2\, d\xi_3 + \ldots \equiv D(\lambda)$$

Первым минором Фредгольма называется

$$D(x,y;\lambda) \equiv \lambda K(x,y) - \lambda^2 \int_a^b \begin{vmatrix} K(x,y) & K(x,\xi) \\ K(\xi,y) & K(\xi,\xi) \end{vmatrix} d\xi +$$

$$+\frac{\lambda^3}{2!}\int_a^b\int_a^b \begin{vmatrix} K(x,y) & K(x,\xi_1) & K(x,\xi_2) \\ K(\xi_1,y) & K(\xi_1,\xi_1) & K(\xi_1,\xi_2) \\ K(\xi_2,y) & K(\xi_2,\xi_1) & K(\xi_2,\xi_2) \end{vmatrix} d\xi_1\, d\xi_2 - \ldots$$

Далее покажем, что решение уравнения (4.1) выражается формулой

$$u(x) = f(x) + \frac{1}{D(\lambda)}\int_a^b f(\xi) D(x,\xi;\lambda)d\xi.$$

Теорема 4.1. Между определителем Фредгольма $D(\lambda)$ и первым минором Фредгольма $D(x,y;\lambda)$ имеют место следующие два соотношения (***фундаментальные соотношения Фредгольма***)

$$D(x,y;\lambda) - \lambda K(x,y) D(\lambda) = \lambda \int_a^b K(\xi,y) D(x,\xi;\lambda)d\xi,$$

$$D(x,y;\lambda) - \lambda K(x,y) D(\lambda) = \lambda \int_a^b K(x,\xi) D(\xi,y;\lambda)d\xi,$$

справедливые при любых значениях λ и для всех x и y в области R.

§ 5. Решение интегрального уравнения, данное Фредгольмом при $D(\lambda)\neq 0$

Запишем уравнение (4.1) в виде

$$u(\xi)=f(\xi)+\lambda\int_a^b K(\xi,t)\,u(t)\,dt\ .$$

Предполагая, что равенство выполняется для некоторой непрерывной функции $u(\xi)$, умножим обе части на $D(x,\xi;\lambda)$, проинтегрируем по ξ от a до b. Получим

$$\int_a^b D(x,\xi;\lambda)f(\xi)d\xi-\lambda D(\lambda)\int_a^b K(x,t)u(t)dt=0\,.$$

Из уравнению (4.1) следует, что

$$\int_a^b D(x,\xi;\lambda)f(\xi)d\xi-D(\lambda)[u(x)-f(x)]=0\,.$$

При $D(\lambda)\neq 0$

$$u(x)=f(x)+\int_a^b\frac{D(x,\xi;\lambda)f(\xi)}{D(\lambda)}d\xi\,. \qquad (5.1)$$

Теорема 5.1. Первая фундаментальная теорема Фредгольма.

Если

а) $D(\lambda)\neq 0$;

б) ядро $K(x,\xi)$ непрерывно в R;

в) $f(x)$ непрерывна в l,

то уравнение $u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi$ имеет одно и только одно непрерывное решение в l, выражаемое формулой

$$u(x)=f(x)+\int_a^b\frac{D(x,\xi;\lambda)f(\xi)}{D(\lambda)}d\xi\,,$$

где $D(\lambda)$ и $D(x,\xi;\lambda)$ – степенные ряды, сходящиеся при любом λ, а ряд $D(x,\xi;\lambda)$, кроме того, сходится равномерно относительно всех $(x,\xi)\in R$.

Следствие. Если $D(\lambda)\neq 0$, то однородное уравнение

$$u(x)=\lambda\int_a^b K(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi$$

имеет одно и только одно непрерывное решение, а именно тривиальное $u(x)\equiv 0$.

§ 6. Решение однородного уравнения для случая $D(\lambda)=0$, $D'(\lambda)\neq 0$

Пусть для уравнения

$$u(x)=\lambda\int_a^b K(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi$$

при $\lambda=\lambda_0$ значение $D(\lambda_0)=0$. Будем решать это уравнение для значения параметра $\lambda=\lambda_0$

$$u(x)=\lambda_0\int_a^b K(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi\,. \tag{6.1}$$

Решение получим с помощью второго фундаментального соотношения Фредгольма

$$D(x,y;\lambda)-\lambda K(x,y)D(\lambda)=\lambda\int_a^b K(x,\xi)D(\xi,y;\lambda)d\xi\,, \tag{6.2}$$

которое верно при любом λ, значит при $\lambda=\lambda_0$ из (6.2) следует

$$D(x,y;\lambda_0)=\lambda_0\int_a^b K(x,\xi)D(\xi,y;\lambda_0)d\xi\,.$$

Это равенство имеет место при любом $y\in(a,b)$, следовательно, и при $y=y_0$

$$D(x,y_0;\lambda_0)=\lambda_0\int_a^b K(x,\xi)D(\xi,y_0;\lambda_0)d\xi\,.$$

Это есть уравнение (6.1), где $u(x)$ заменено на $D(x, y_0; \lambda_0)$. Таким образом,

$$u(x) = D(x, y_0; \lambda_0)$$

есть решение уравнения (6.1).

Это решение непрерывно, так как ряд $D(x, y; \lambda)$ сходится равномерно относительно x и y и члены ряда непрерывны.

Теорема 6.1. Если $D(\lambda_0) = 0$, $D(x, y; \lambda_0) \neq 0$, то функция $u(x) = D(x, y_0; \lambda_0)$ при подходящем выборе y_0 будет непрерывным решением уравнения

$$u(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x, \xi)\, u(\xi)\, d\xi ,$$

не равным тождественно нулю.

В теореме условие $D(x, y; \lambda_0) \neq 0$ можно заменить условием $D'(\lambda_0) \neq 0$, так как можно показать, что

$$\int_a^b D(x, x; \lambda) dx = -\lambda D'(\lambda) . \tag{6.3}$$

Если $u(x) = D(x, y_0; \lambda_0)$ – решение однородного интегрального уравнения (6.1), то $Cu(x)$, где C = const, также является решением этого уравнения.

§ 7. Решение однородного уравнения для случая $D(\lambda) = 0$, $D'(\lambda) = 0$

Рассмотрим случай, когда $D(\lambda_0) = 0$, $D(x, y; \lambda_0) = 0$. Введем обозначения

$$K\begin{pmatrix} s_1, s_2, \ldots, s_n \\ t_1, t_2, \ldots, t_n \end{pmatrix} \equiv \begin{vmatrix} K(s_1, t_1) \ldots K(s_1, t_n) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K(s_n, t_1) \ldots K(s_n, t_n) \end{vmatrix} .$$

Пусть

$$B_n\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_p \\ y_1,\dots,y_p \end{pmatrix}=\int_a^b\dots\int_a^b K\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_p,t_1,\dots,t_n \\ y_1,\dots,y_p,t_1,\dots,t_n \end{pmatrix}dt_1\dots dt_n,$$

$$B_0\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_p \\ y_1,\dots,y_p \end{pmatrix}=K\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_p \\ y_1,\dots,y_p \end{pmatrix}.$$

Тогда p-й минор от $D(\lambda)$ выражается рядом

$$D\begin{pmatrix} x_1, & \dots & x_p, & \\ y_1, & \dots & y_p, & \end{pmatrix}\lambda = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^{n+p}}{n!}B_n\begin{pmatrix} x_1,\dots,x_p \\ y_1,\dots,y_p \end{pmatrix}\equiv D_p(x,y;\lambda),$$

который приводится при $p = 1$ к $D(x,y;\lambda)$.

Бесконечный ряд для $D\begin{pmatrix} x_1, & \dots & x_p, & \\ y_1, & \dots & y_p, & \end{pmatrix}\lambda$ абсолютно сходится для всех значений λ и равномерно относительно $x_1,\dots x_p;y_1,\dots y_p$, удовлетворяющих неравенствам $a\le x_\alpha\le b,\ a\le y_\beta\le b,\ (\alpha,\beta=1,2,\dots,p)$.

Если два значения с различными индексами становятся равными, например, $x_r=x_s$ или $y_i=y_j$, то $D_p(x,y;\lambda)=0$.

Обобщения фундаментальных соотношений Фредгольма

$$D\begin{pmatrix} x_1, & \dots & x_p, & \\ y_1, & \dots & y_p, & \end{pmatrix}\lambda = \sum_{\alpha=1}^{p}(-1)^{\alpha+\beta}\lambda K(x_\alpha,y_\beta)D\begin{pmatrix} x_1,\dots, & x_{\alpha-1},x_{\alpha+1}, & \dots,x_p & \\ y_1,\dots & y_{\beta-1},y_{\beta+1}, & \dots,y_p & \end{pmatrix}\lambda +$$

$$+\lambda\int_a^b K(t,y_\beta)D\begin{pmatrix} x_1,\dots, & x_{\beta-1},x_\beta,x_{\beta+1}, & \dots,x_p & \\ y_1,\dots & y_{\beta-1},t,y_{\beta+1}, & \dots,y_p & \end{pmatrix}\lambda\, dt =$$

$$=\sum_{\beta=1}^{p}(-1)^{\alpha+\beta}\lambda K(x_\alpha,y_\beta)D\begin{pmatrix} x_1,\dots, & x_{\alpha-1},x_{\alpha+1}, & \dots,x_p & \\ y_1,\dots & y_{\beta-1},y_{\beta+1}, & \dots,y_p & \end{pmatrix}\lambda +$$

$$+\lambda\int_a^b K(x_\alpha,t)D\begin{pmatrix} x_1,\dots, & x_{\alpha-1},t,x_{\alpha+1}, & \dots,x_p & \\ y_1,\dots & y_{\alpha-1},y_\alpha,y_{\alpha+1}, & \dots,y_p & \end{pmatrix}\lambda\, dt.$$

Записанное выше соотношение (6.3) является частным случаем следующего соотношения

$$\int_a^b \ldots \int_a^b D\begin{pmatrix} x_1, & \ldots & x_p, & \\ & & & \lambda \\ x_1, & \ldots & x_p, & \end{pmatrix} dx_1 \ldots dx_p = (-1)^p \lambda^p \frac{d^p D(\lambda)}{d\lambda^p}. \quad (7.1)$$

Пусть λ_0 – корень уравнения $D(\lambda) = 0$. $\lambda_0 \neq 0$, так как $D(0) = 1$. Корень λ_0 имеет конечную кратность r $(r \geq 1)$

$$D(\lambda_0) = 0, \quad D'(\lambda_0) = 0, \quad \ldots, \quad D^{(r-1)}(\lambda_0) = 0, \quad D^{(r)}(\lambda_0) \neq 0.$$

Положим в (7.1) $\lambda = \lambda_0$, $p = r$, тогда интеграл в левой части не равен нулю, так как правая часть не равна нулю. Так как $\lambda_0 \neq 0$, то

$$D\begin{pmatrix} x_1, & \ldots & x_r, & \\ & & & \lambda_0 \\ x_1, & \ldots & x_r, & \end{pmatrix} \neq 0,$$

значит

$$D\begin{pmatrix} x_1, & \ldots & x_r, & \\ & & & \lambda_0 \\ y_1, & \ldots & y_r, & \end{pmatrix} \neq 0.$$

Поэтому, идя по ряду

$$D(\lambda_0) = 0, \; D(x, y, \lambda_0), \; D\begin{pmatrix} x_1, & x_2 & \\ & & \lambda_0 \\ y_1, & y_2 & \end{pmatrix}, \; D\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3 & \\ & & & \lambda_0 \\ y_1, & y_2, & y_3 & \end{pmatrix}, \ldots,$$

должны прийти к некоторому числу $q \leq r$, называемому ***рангом*** корня λ_0 такому, что

$$D(\lambda_0) \equiv 0, \; D(x, y, \lambda_0) \equiv 0, \ldots,$$

$$D\begin{pmatrix} x_1, & \ldots & x_{q-1} & \\ & & & \lambda_0 \\ y_1, & \ldots & y_{q-1} & \end{pmatrix} \equiv 0, \; D\begin{pmatrix} x_1, & \ldots & x_q & \\ & & & \lambda_0 \\ y_1, & \ldots & y_q & \end{pmatrix} \neq 0.$$

То есть существует некоторая совокупность значений $x_1', \ldots x_q'; y_1', \ldots y_q'$, принимаемых переменными $x_1, \ldots x_q; y_1, \ldots y_q$, при которых

$$D\begin{pmatrix} x_1', & \ldots & x_q' & \\ & & & \lambda_0 \\ y_1', & \ldots & y_q' & \end{pmatrix} \neq 0.$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 7.1. Ранг q корня λ_0 уравнения $D(\lambda)=0$ меньше или равен кратности r этого корня.

Теорема 7.2. Вторая фундаментальная теорема Фредгольма.

Если $\lambda=\lambda_0$ – корень уравнения $D(\lambda)=0$ ранга q, то однородное интегральное уравнение

$$u(x)=\lambda_0\int_a^b K(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi$$

имеет q линейно независимых решений, и каждое другое решение этого уравнения выражается через них линейно и однородно. Эта система независимых решений определяется формулами

$$\varphi_\alpha(x)=\frac{D\begin{pmatrix} x_1',\ldots x_{\alpha-1}', & x, & x_{\alpha+1}', & \ldots & x_q', & \\ y_1',\ldots y_{\alpha-1}', & y_\alpha', & y_{\alpha+1}', & \ldots & y_q', & \lambda_0 \end{pmatrix}}{D\begin{pmatrix} x_1', & \ldots & x_q', & \\ y_1', & \ldots & y_q', & \lambda_0 \end{pmatrix}} \quad (\alpha=1,\ldots,q).$$

Если $D(\lambda)$ – определитель Фредгольма для ядра $K(x,\xi)$ и $D(\lambda_0)=0$, то λ_0 – ***характеристическое число*** ядра $K(x,\xi)$.

Если функция $\varphi(x)$ непрерывна, не обращается тождественно в нуль в интервале (a,b) и удовлетворяет уравнению

$$\varphi(x)=\lambda_0\int_a^b K(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi\,,$$

то $\varphi(x)$ – ***фундаментальная функция*** ядра $K(x,\xi)$, принадлежащая характеристическому числу λ_0.

Функции $\varphi_1(x),\ldots,\varphi_q(x)$ образуют полную систему фундаментальных функций ядра $K(x,\xi)$, принадлежащих характеристическому числу λ_0, если каждое другое решение выражается линейно через эти q решений.

§ 8. Союзные однородные интегральные уравнения

Рассмотрим уравнение

$$V(x)=\lambda_0\int_a^b K(\xi,x)V(\xi)\,d\xi, \qquad (8.1)$$

которое называется ***союзным*** с уравнением

$$u(x)=\lambda_0\int_a^b K(x,\xi)u(\xi)\,d\xi.$$

Заметим, что ядро $\overline{K}(x,\xi)=K(\xi,x)$. Имеем

$$D(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}A_n,$$

где

$$A_n=\int_a^b\ldots\int_a^b\begin{vmatrix}K_{11} & \ldots & K_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ K_{n1} & \ldots & K_{nn}\end{vmatrix}d\xi_1\ldots d\xi_n.$$

Определитель Фредгольма для союзного уравнения

$$\overline{D}(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\lambda^n}{n!}\overline{A}_n,$$

где

$$\overline{A}_n=\int_a^b\ldots\int_a^b\begin{vmatrix}\overline{K}_{11} & \ldots & \overline{K}_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \overline{K}_{n1} & \ldots & \overline{K}_{nn}\end{vmatrix}d\xi_1\ldots d\xi_n.$$

Так как $\overline{K}(x,\xi)=K(\xi,x)$, то

$$\overline{A}_n=\int_a^b\ldots\int_a^b\begin{vmatrix}K_{11} & \ldots & K_{n1}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ K_{1n} & \ldots & K_{nn}\end{vmatrix}d\xi_1\ldots d\xi_n.$$

Определитель в $\overline{A}_n$ отличается от определителя в A_n тем, что строки и столбцы переставлены. Поэтому $\overline{A}_n = A_n$, следовательно, $\overline{D}(\lambda) \equiv D(\lambda)$. Значит, $K(x,\xi)$ и $K(\xi,x)$ имеют одни и те же характеристические числа.

Аналогично можно показать, что

$$\overline{B}_n\begin{pmatrix} x_1, & \dots & x_p \\ y_1, & \dots & y_p \end{pmatrix} = B_n\begin{pmatrix} y_1, & \dots & y_p \\ x_1, & \dots & x_p \end{pmatrix},$$

$$\overline{D}\begin{pmatrix} x_1, & \dots & x_p, & \\ & & & \lambda \\ y_1, & \dots & y_p, & \end{pmatrix} = D\begin{pmatrix} y_1, & \dots & y_p, & \\ & & & \lambda \\ x_1, & \dots & x_p, & \end{pmatrix}.$$

Теорема 8.1. Если λ_0 – характеристическое число ядра $K(x,\xi)$ с рангом q, то λ_0 является также характеристическим числом ядра $K(\xi,x)$ с тем же рангом $\overline{q} = q$.

Введем обозначение

$$H(x,y) = \frac{D\begin{pmatrix} x, & x_1', & \dots & x_q', & \\ & & & & \lambda_0 \\ y, & y_1', & \dots & y_q', & \end{pmatrix}}{\overline{D}\begin{pmatrix} x_1', & \dots & x_q', & \\ & & & \lambda_0 \\ y_1', & \dots & y_q', & \end{pmatrix}}.$$

Для союзного ядра функция $\overline{H}(x,y) = H(y,x)$.

Применяя вторую фундаментальную теорему Фредгольма к союзному уравнению (8.1), отметим, что оно также имеет q линейно независимых решений. Фундаментальная система этих решений задается формулами

$$\overline{\varphi}_\alpha(x) = \frac{D\begin{pmatrix} x_1', \dots x_{\alpha-1}', & x_\alpha', & x_{\alpha+1}', & \dots & x_q', & \\ & & & & & \lambda_0 \\ y_1', \dots y_{\alpha-1}', & x, & y_{\alpha+1}', & \dots & y_q', & \end{pmatrix}}{D\begin{pmatrix} x_1', & \dots & x_q', & \\ & & & \lambda_0 \\ y_1', & \dots & y_q', & \end{pmatrix}}.$$

Наиболее общее решение уравнения (8.1)

$$V(x)=C_1\overline{\varphi}_1(x)+\ldots+C_q\overline{\varphi}_q(x).$$

Теорема 8.2 (об ортогонализации).

Если λ_0 и λ_1 – два различных характеристических числа ядра $K(x,\xi)$, $\varphi_0(x)$ – фундаментальная функция ядра $K(x,\xi)$, принадлежащая характеристическому числу λ_0, $\overline{\varphi}_1(x)$ – фундаментальная функция ядра $\overline{K}(x,\xi)$, принадлежащая характеристическому числу λ_1,

$$\varphi_0(x)=\lambda_0\int_a^b K(x,\xi)\,\varphi_0(\xi)\,d\xi,$$

$$\overline{\varphi}_1(x)=\lambda_1\int_a^b \overline{K}(x,\xi)\,\overline{\varphi}_1(\xi)\,d\xi=\lambda_1\int_a^b K(\xi,x)\,\overline{\varphi}_1(\xi)\,d\xi,$$

то

$$\int_a^b \varphi_0(x)\,\overline{\varphi}_1(x)\,dx=0.$$

Две непрерывные функции $g(x)$ и $h(x)$, между которыми имеет место соотношение

$$\int_a^b g(x)\,h(x)\,dx=0,$$

называются ***взаимно ортогональными***.

Функции $\varphi_0(x)$ и $\overline{\varphi}_1(x)$ взаимно ортогональны.

§ 9. Неоднородные интегральные уравнения для случая $D(\lambda)=0$

Рассмотрим уравнение

$$u(x)=f(x)+\lambda_0\int_a^b K(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi, \qquad (9.1)$$

когда $D(\lambda_0)=0$, λ_0 имеет ранг q.

Покажем, что уравнение (9.1), когда $D(\lambda_0)=0$, вообще говоря, не имеет никакого решения, но если $f(x)$ удовлетворяет определенным условиям, то уравнение (9.1) имеет бесконечную совокупность решений.

Предположим, что $u(x)$ – непрерывная функция от x, удовлетворяющая уравнению (9.1). Умножим обе части этого уравнения на функцию $\overline{\varphi}_\alpha(x)$, являющуюся фундаментальной функцией союзного однородного уравнения, принадлежащей характеристическому числу λ_0

$$\overline{\varphi}_\alpha(x)=\lambda_0\int_a^b K(\xi,x)\,\overline{\varphi}_\alpha(\xi)\,d\xi,$$

и проинтегрируем по x от a до b. После некоторых преобразований получим

$$\int_a^b f(x)\,\overline{\varphi}_\alpha(x)\,dx=0,\quad (\alpha=1,\ldots,q). \tag{9.2}$$

Значит, для того чтобы могло существовать непрерывное решение $u(x)$ уравнения (9.1), функция $f(x)$ должна удовлетворять q условиям (9.2).

Можно показать обратное, что если $f(x)$ удовлетворяет q условиям (9.2), то уравнение (9.1) имеет по крайней мере одно непрерывное решение $u_0(x)$, определяемое формулой

$$u_0(x)=f(x)+\int_a^b H(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi.$$

Теорема 9.1. Третья фундаментальная теорема Фредгольма.

Если λ_0 – характеристическое число ядра $K(x,\xi)$ с рангом q, то уравнение

$$u(x)=f(x)+\lambda_0\int_a^b K(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi,$$

вообще говоря, не имеет непрерывного решения. Для того, чтобы существовало непрерывное решение, необходимо, чтобы выполнялись условия

$$\int_a^b f(x)\,\overline{\varphi}_\alpha(x)\,dx = 0, \quad (\alpha = 1,\ldots,q),$$

где функция $\overline{\varphi}_\alpha(x)$ представляет собой полную систему фундаментальных функций союзного однородного уравнения

$$V(x) = \lambda_0 \int_a^b K(\xi, x)\,V(\xi)\,d\xi\,.$$

Если эти условия выполняются, то существует ∞^q решений, определяемых формулой

$$u(x) = f(x) + \int_a^b H(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi + C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_q\varphi_q(x),$$

где $C_1,\ldots,C_q$ – произвольные постоянные, $\{\varphi_\alpha(x)\}$ – полная система фундаментальных функций однородного уравнения

$$u(x) = \lambda_0 \int_a^b K(x,\xi)\,u(\xi)\,d\xi\,,$$

а

$$H(x,y) = \frac{D\begin{pmatrix} x, & x_1', & \ldots & x_q', & \\ \xi, & \xi_1', & \ldots & \xi_q', & \end{pmatrix}\lambda_0}{D\begin{pmatrix} x_1', & \ldots & x_q', & \\ \xi_1', & \ldots & \xi_q', & \end{pmatrix}\lambda_0}\,.$$

Сводная таблица решений

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi$$

$D(\lambda) \neq 0$		$D(\lambda) = 0$, ранг q	
Неоднородное	Однородное	Неоднородное	Однородное
Единственное решение $u(x) = f(x) + \int_a^b \frac{D(x,\xi;\lambda) f(\xi)}{D(\lambda)} d\xi$	Единственное решение $u \equiv 0$	Вообще говоря, нет непрерывных решений. Решение существует только тогда, когда функция $f(x)$ удовлетворяет условиям $\int_a^b f(x)\overline{\varphi_\alpha}(x)\, dx = 0.$ В этом случае имеется ∞^q решений	∞^q решений: $\sum_{\alpha=1}^{q} C_\alpha \varphi_\alpha(x)$

§10. Уравнения с вырожденными ядрами

Ядро $K(x,\xi)$ называется ***вырожденным***, если его можно представить в виде суммы

$$K(x,\xi) = \sum_{j=1}^{p} \Phi_j(x) \Psi_j(\xi)$$

произведений функций, зависящих только от x и только от ξ.

Без ограничения общности можно считать, что система функций $\Phi_j(x)$, равно как и $\Psi_j(\xi)$, линейно независима.

Будем рассматривать уравнение

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,\xi)\, u(\xi)\, d\xi = f(x) + \lambda \int_a^b \sum_{j=1}^{p} \Phi_j(x) \Psi_j(\xi)\, u(\xi)\, d\xi\,. \quad (10.1)$$

Допустим, что решение $u(x)$ уравнения (10.1) при заданном λ существует, и обозначим

$$u_j = \int_a^b \Psi_j(x)\, u(x)\, dx \,,\ (j = 1,\ \ldots,\ p). \tag{10.2}$$

Тогда из (10.1) получаем

$$u(x) = f(x) + \lambda \sum_{j=1}^{p} \Phi_j(x)\, u_j\,. \tag{10.3}$$

Заменим индекс суммирования на k и подставим в (10.2)

$$u_j - \lambda \sum_{j=1}^{p} a_{jk}\ u_k = f_j,\ \ (j = 1,\ldots, p), \tag{10.4}$$

где обозначено

$$a_{jk} = \int_a^b \Psi_j(x)\, \Phi_k(x)\, dx\,,\ \ f_j = \int_a^b \Psi_j(x)\, f(x)\, dx\ \ (j,\, k = 1,\ldots, p).$$

Формула (10.2) и обратная к ней формула (10.3) устанавливают взаимно однозначное соответствие между решениями интегрального уравнения (10.1) и решениями системы линейных алгебраических уравнений (10.4). Разрешимость системы (10.4) зависит от ее определителя

$$D(\lambda) = \det\left(\delta_{jk} - \lambda a_{jk}\right) = \det\left(\delta_{jk} - \lambda \int_a^b \Psi_j(x)\, \Phi_k(x)\, dx\right).$$

Если $D(\lambda) \neq 0$, то система (10.4) имеет одно решение; если $D(\lambda) = 0$, то решений нет или система имеет бесконечное множество решений.

Этим же свойством обладает уравнение (10.1).

Если решать систему (10.4) по формулам Крамера, то

$$u_j = \frac{1}{D(\lambda)} \sum_{k=1}^{p} D_{jk}(\lambda) f_k\ ,\ (j = 1,\ldots, p),$$

где $D_{jk}(\lambda)$ – некоторые многочлены степени не выше $p - 1$.

Подставляя эти формулы в (10.3), получим:

$$u(x)=f(x)+\lambda\sum_{j=1}^{p}\frac{1}{D(\lambda)}\sum_{k=1}^{p}D_{jk}(\lambda)\int_a^b\Psi_j(\xi)\,f(\xi)\,d\xi\,\Phi_j(x)\ ,$$

т. е.

$$u(x)=f(x)+\lambda\int_a^b\Gamma(x,\xi;\lambda)\,f(\xi)\,d\xi\ ,$$

где функция

$$\Gamma(x,\xi;\lambda)=\frac{1}{D(\lambda)}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{p}D_{jk}(\lambda)\Phi_j(x)\Psi_k(\xi)$$

является ***резольвентой*** уравнения (10.1). При фиксированных x,ξ она представляет дробно-рациональную функцию от λ.

Имеют место равенства

$$\Gamma(x,\xi;\lambda)=\lambda\int_a^b K(x,\eta)\Gamma(\eta,\xi;\lambda)d\eta+K(x,\xi),$$

$$\Gamma(x,\xi;\lambda)=\lambda\int_a^b K(\eta,\xi)\Gamma(x,\eta;\lambda)d\eta+K(x,\xi).$$

Упражнения к разделу 3

Решить интегральные уравнения методом последовательных подстановок или с помощью применения взаимных функций.

1. $u(x)=\frac{5}{6}x+\frac{1}{2}\int_0^1 xt\,u(t)dt.$

2. $u(x)=e^x-\frac{e}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_0^1 u(t)dt.$

3. $u(x)=\sin x-\frac{x}{4}+\frac{1}{4}\int_0^{\frac{1}{2}} xt\,u(t)dt.$

4. $u(x)=1+\int_0^x u(t)dt.$

5. $u(x) = x + \int\limits_0^{\frac{1}{2}} u(t)dt.$

6. $u(x) = \frac{3}{2}e^x - \frac{xe^x}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int\limits_0^1 t\,u(t)dt.$

Вычислить $D(\lambda)$ и $D(x, y; \lambda)$ для уравнения Фредгольма

$$u(x) = f(x) + \lambda\int\limits_a^b K(x,\xi)u(\xi)d\xi$$

для следующих ядер

7. $K(x,\xi) = 1, \quad a = 0, \quad b = 1.$
8. $K(x,\xi) = \sin x, \quad a = 0, \quad b = \pi.$
9. $K(x,\xi) = 2e^x e^\xi, \quad a = 0, \quad b = 1.$
10. $K(x,\xi) = x - \xi, \quad a = 0, \quad b = 1.$
11. $K(x,\xi) = g(\xi), \quad a = a, \quad b = b.$

Решить интегральные уравнения.

12. $u(x) = \cos x + \lambda\int\limits_0^\pi \sin x\, u(\xi)d\xi.$

13. $u(x) = e^x + \lambda\int\limits_0^{10} x\xi u(\xi)d\xi.$

14. $u(x) = \int\limits_0^1 u(\xi)d\xi.$

15. $u(x) = \frac{1}{e^2 - 1}\int\limits_0^1 2e^x e^\xi u(\xi)d\xi.$

16. $u(x) = x^2 + \lambda\int\limits_0^{10} \xi u(\xi)d\xi.$

17. $u(x) = \sin x + \lambda\int\limits_4^{10} x u(\xi)d\xi.$

18. $u(x) = \sec x\, tg\, x - \lambda\int\limits_0^1 u(\xi)d\xi.$

Р а з д е л 4. Уравнения с симметричными ядрами

§ 1. Основные свойства

Будем рассматривать уравнения вида

$$u(x)=\lambda\int_a^b K(x,\xi)u(\xi)d\xi+f(x), \tag{1.1}$$

где ядро $K(x,\xi)$ – вещественное, непрерывное в $\boldsymbol{R}$, не обращается тождественно в нуль и является симметричным, т. е.

$$K(x,\xi)\equiv K(\xi,x).$$

Теорема 1.1. Каждое вещественное, симметричное, непрерывное и тождественно не равное нулю ядро $K(x,\xi)$ обладает, по меньшей мере, одним характеристическим числом λ.

Известно, что союзные ядра $K(x,\xi)$ и $\overline{K}(x,\xi)$

$$\overline{K}(x,\xi)=K(\xi,x)$$

имеют одни и те же характеристические числа с одинаковыми рангами.

Если λ_0 и λ_1 $(\lambda_0\neq\lambda_1)$ – два характеристических числа ядра $K(x,\xi)$, а следовательно, и ядра $K(\xi,x)$; $\varphi_0(x)$ – фундаментальная функция ядра $K(x,\xi)$, принадлежащая характеристическому числу λ_0, а $\varphi_1(x)$ – фундаментальная функция ядра $K(\xi,x)$, принадлежащая характеристическому числу λ_1, то

$$\int_a^b \varphi_0(x)\varphi_1(x)dx=0.$$

Но если ядро $K(x,\xi)$ симметрично, то $\varphi_1(x)$ является также фундаментальной функцией ядра $K(x,\xi)$, принадлежащей характеристическому числу λ_1.

Теорема 1.2. Если ядро $K(x,\xi)$ симметрично, $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ – фундаментальные функции этого ядра, принадлежащие соответственно характеристическим числам λ_0 и λ_1 $(\lambda_0 \neq \lambda_1)$, то $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ ортогональны в интервале (a,b)

$$\int_a^b \varphi_0(x)\varphi_1(x)dx = 0 .$$

Теорема Гильберта. Если ядро $K(x,\xi)$ вещественно, симметрично, непрерывное и не обращается тождественно в нуль, то все характеристические числа вещественны.

В теории Фредгольма было доказано, что $q \leq r$, где q – ранг, r – кратность корня λ_0 уравнения $D(\lambda_0) = 0$. Для случая симметричного ядра Гильберт доказал теорему.

Теорема 1.3. Ранг q характеристического числа λ_0 вещественного симметричного ядра равен его кратности r.

§ 2. Разложение ядра в ряд по полной ортонормированной системе фундаментальных функций

Теорема 2.1. Каждому вещественному симметричному ядру $K(x,\xi)$ принадлежит полная ортогональная система фундаментальных функций $\{\psi_r(x)\}$, обладающая следующими свойствами:

1) $\psi_r(x)$ есть фундаментальная функция, принадлежащая характеристическому числу λ_r:

$$\psi_r(x) = \lambda_r \int_a^b K(x,\xi)\,\psi_r(\xi)d\xi ;$$

2) $\int_a^b \psi_r^2(x)dx = 1$;

3) $\int_a^b \psi_r(x)\psi_s(x)dx = 0, \quad (r \neq s)$;

4) все $\psi_r(x)$ вещественны;

5) каждая фундаментальная функция $\varphi(x)$ может быть представлена в форме

$$\varphi(x) = C_{r_1}\psi_{r_1}(x) + \ldots + C_{r_m}\psi_{r_m}(x).$$

Теорема 2.2. Если ядро $K(x,\xi)$ разложено в ряд по фундаментальным функциям $K(x,\xi) = \sum\limits_j C_j\psi_j(x)$ и этот ряд, в случае, если он бесконечен, равномерно сходится, то

$$K(x,\xi) = \sum_j \frac{\psi_j(x)\psi_j(\xi)}{\lambda_j}.$$

Это ***формула разложения симметричного ядра*** по его фундаментальным функциям.

1. Случай конечного числа фундаментальных функций ядра.

Теорема 2.3. Если существует только конечное число m характеристических чисел λ_j, то

$$K(x,\xi) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\psi_j(x)\psi_j(\xi)}{\lambda_j}.$$

2. Случай ядер, обладающих бесконечным множеством характеристических чисел.

Теорема 2.4. Если существует бесконечное количество характеристических чисел, и ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{\psi_j(x)\psi_j(\xi)}{\lambda_j}$ сходится равномерно относительно x и ξ в области R, то

$$K(x,\xi) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\psi_j(x)\psi_j(\xi)}{\lambda_j}.$$

§ 3. Разложение произвольной функции в ряд по полной ортонормированной системе фундаментальных функций симметричного ядра

Дана произвольная функция $f(x)$. Нужно представить ее, по возможности, в форме

$$f(x) = \sum_j C_j \psi_j(x),$$

где функции $\psi_j(x)$ составляют полную нормальную ортогональную систему фундаментальных функций ядра $K(x,\xi)$.

Если функция $f(x)$ может быть представлена в виде

$$f(x) = \int_a^b K(x,\xi) g(\xi) d\xi\,,$$

где $g(x)$ – функция, непрерывная в (a,b), то

$$f(x) = \sum_j \frac{1}{\lambda_j} \left(\int_a^b g(\xi) \psi_j(\xi) d\xi \right) \psi_j(x),$$

причем этот ряд сходится в (a,b) равномерно и абсолютно.

Значит функцию, представимую через ядро, можно разложить по фундаментальным функциям этого ядра. Это ***теорема Гильберта – Шмидта***.

§ 4. Решение симметричного интегрального уравнения

Рассмотрим уравнение

$$u(x) = \lambda \int_a^b K(x,\xi) u(\xi) d\xi + f(x) \tag{4.1}$$

при условии, что ядро $K(x,\xi)$ симметрично, и что известна система $\{\psi_r(x)\}$ его фундаментальных функций и характеристических чисел.

Если λ – не характеристическое число, то решение уравнения (4.1) имеет вид

$$u(x)=f(x)+\lambda\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(f,\psi_n)}{\lambda_n-\lambda}\psi_n(x). \tag{4.2}$$

Пусть λ – характеристическое число, $\lambda=\lambda_{p+1}=\lambda_{p+2}=\ldots=\lambda_q$. Тогда для разрешимости уравнения (4.1) необходимо и достаточно, чтобы $(f,\psi_n)=0$ $(n=p+1,p+2,\ldots,q)$. Допустим, что эти условия выполнены, тогда коэффициенты из ряда (4.2) с указанными номерами принимают вид $\frac{0}{0}$. Если заменить эти коэффициенты произвольными числами, то (4.2) – решение симметричного уравнения (4.1) при характеристическом λ.

Резольвента симметричного ядра имеет вид

$$\Gamma(x,\xi;\lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(x)\overline{\psi}_n(\xi)}{\lambda_n-\lambda}.$$

При $\lambda=0$ эта формула переходит в ***билинейный ряд*** для ядра $K(x,\xi)$

$$K(x,\xi)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\psi_n(x)\overline{\psi}_n(\xi)}{\lambda_n}.$$

Отметим, что из этой формулы следует, что симметричное ядро является вырожденным тогда и только тогда, когда оно имеет конечное число характеристических чисел или, что то же, конечное число ортонормированных фундаментальных функций.

Если все характеристические числа положительны, само ядро непрерывно, область l конечна, то билинейный ряд сходится равномерно по обеим переменным (***теорема Мерсера***).

Следствия.

1. Из разложения ядра по фундаментальным функциям.

$$\int_a^b\int_a^b[K(x,\xi)]^2dxd\xi=\sum_j\frac{1}{\lambda_j^2};$$

$$\int_a^b K(x,x)dx=\sum_j\frac{1}{\lambda_j}.$$

2. Если $g(x)$ и $h(x)$ непрерывны, то

$$\int_a^b\int_a^b K(x,\xi)g(x)h(\xi)dxd\xi = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(g\psi_j)(h\psi_j)}{\lambda_j}.$$

§ 5. Классификация симметричных ядер

Пространством Гильберта $L_2[a,b]$ называется пространство функций, заданных при $a \le x \le b$ и не обязательно непрерывных, для которых норма

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 dx}$$

принимает конечное значение. При конечных a и b это означает, что $f(x)$ должна быть либо конечной, либо, во всяком случае, квадратично суммируемой.

Скалярное произведение в пространстве $L_2[a,b]$

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)dx, \quad f,g \in L_2[a,b].$$

Расстояние в $L_2[a,b]$

$$\rho(f,g) = \|f-g\| = \sqrt{\int_a^b |f(x)-g(x)|^2 dx}.$$

Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства X называется фундаментальной последовательностью, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N_0(\varepsilon)$ такой, что $\rho_X(x_n,x_m) < \varepsilon$ при $n,m > N_0(\varepsilon)$.

Если в метрическом пространстве X каждая фундаментальная последовательность сходится к некоторому пределу, являющемуся элементом того же пространства, то пространство X называется ***полным***.

В частности, пространство $L_2[a,b]$ является полным.

Симметричное ядро $K(x,\xi)$, заданное в области l, называется ***полным***, если система его собственных фундаментальных функций полна в $L_2(l)$; в противном случае оно называется ***неполным***.

Симметричное ядро называется ***положительным*** (соответственно ***отрицательным***), если все его характеристические числа положительны (соответственно отрицательны).

Полное положительное ядро называется ***положительно определенным***; аналогично определяется ***отрицательно определенное*** ядро.

Можно дать равносильное определение положительных (и отрицательных) ядер.

Симметричное ядро $K(x,\xi)$, заданное в области l, называется ***положительным***, если так называемая ***квадратичная форма*** этого ядра, равная

$$(Ku,u)=\int\limits_l\int\limits_l K(x,\xi)\overline{u}(x)u(\xi)dx\,d\xi\,, \tag{5.1}$$

неотрицательна, какова бы ни была функция $u\in L_2(l)$.

То же ядро называется ***положительно определенным***, если квадратичная форма (5.1) положительна при любой функции $u\in L_2(l)$, отличной от тождественного нуля.

Несимметричное ядро $H(x,\xi)$, заданное в области l, называется ***симметризируемым слева***, если существует такое положительно определенное ядро $G(x,\xi)$, что ядро

$$\int\limits_l G(x,s)H(s,\xi)ds \tag{5.2}$$

симметрично.

Аналогично определяется ядро, симметризируемое справа.

Если ядро симметризируемо, то оно имеет, по крайней мере, одно характеристическое число и все его характеристические числа вещественны.

§ 6. Ядра Шмидта и билинейный ряд для несимметричных ядер

Пусть $L(x,\xi)$ – несимметричное ядро, удовлетворяющее неравенству

$$\int\limits_l\int\limits_l |L(x,\xi)|^2 \, dx \, d\xi < \infty ,$$

$L^*(x,\xi)$ – сопряженное с $L(x,\xi)$ ядро

$$L^*(x,\xi) = \overline{L(\xi,x)}.$$

Сопряженное ядро получается из исходного с помощью перестановки независимых переменных и перехода к комплексно-сопряженным значениям.

Ядро

$$K_1(x,\xi) = \int\limits_l L^*(x,s)L(s,\xi)ds = \int\limits_l \overline{L(s,x)}L(s,\xi)ds$$

и

$$K_2(x,\xi) = \int\limits_l L(x,s)L^*(s,\xi)ds = \int\limits_l L(x,s)\overline{L(\xi,s)}\, ds \; -$$

симметричные положительные ядра.

Доказывается, что системы их характеристических чисел совпадают. Ядра $K_1(x,\xi)$ и $K_2(x,\xi)$ называются ***ядрами Шмидта*** для ядра $L(x,\xi)$.

Обозначим через $\mu_k \quad (k = 1,2,\ldots)$ характеристические числа ядер Шмидта, через $u_k(x)$ – ортонормированные фундаментальные функции ядра $K_2(x,\xi)$, через $v_k(x)$ – ортонормированные фундаментальные функции ядра $K_1(x,\xi)$.

Каждую из функций $u_k(x)$, $v_k(x)$ можно умножить на произвольный численный множитель, равный единице по модулю. Выберем их так, что справедливы формулы

$$L(x,\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{u_k(x)\overline{v_k(\xi)}}{\sqrt{\mu_k}},\ L^*(x,\xi)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{v_k(x)\overline{u_k(\xi)}}{\sqrt{\mu_k}},$$

которые представляют собой ***билинейные ряды*** для ядер $L(x,\xi)$ и $L^*(x,\xi)$. Имеет место неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_k}\le\int_l\int_l\left|L(x,\xi)\right|^2 dx\,d\xi\,.$$

§ 7. Решение интегральных уравнений первого рода

Симметричные уравнения

Пусть $K(x,\xi)$ – симметричное ядро в R; известна система его характеристических чисел и фундаментальных функций $\psi_j(x)$.

Решения ***однородного*** уравнения I рода

$$\int_l K(x,\xi)u(\xi)d\xi=0 \tag{7.1}$$

совпадают с функциями, ортогональными ко всем фундаментальным функциям ядра $K(x,\xi)$, следовательно, уравнение (7.1) имеет только тривиальное решение, если ядро $K(x,\xi)$ полное. Если оно неполное, то (7.1) имеет конечное или счетное множество линейно независимых решений.

Пусть в ***неоднородном*** уравнении I рода

$$\int_l K(x,\xi)u(\xi)d\xi=f(x) \tag{7.2}$$

функция $f(x)\in L_2(l)$. Для того чтобы (7.2) было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы функциям $f(x)$ раскладывалась в сходящийся ряд по собственным функция ядра $K(x,\xi)$.

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_l f(\xi)\psi_k(\xi)d\xi\ \psi_k(x),$$

ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_k^2\left|f_k\right|^2$ сходится.

Общее решение (7.2) имеет вид

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \int_l f(\xi)\psi_k(\xi)d\xi\psi_k(x),$$

где $u_0(x)$ – любое решение однородного уравнения (7.1). Если ядро $K(x,\xi)$ полное, то $u_0(x) \equiv 0$ и (7.2) при выполнении указанных условий имеет единственное решение

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k \int_l f(\xi)\psi_k(\xi)d\xi\, \psi_k(x).$$

Несимметричные уравнения

Пусть несимметричное ядро $H(x,\xi)$ имеет билинейное разложение

$$H(x,\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k(x)\overline{v_k(\xi)}}{\sqrt{\mu_k}}.$$

Решения ***однородного*** уравнения I рода

$$\int_l H(x,\xi)u(\xi)d\xi = 0 \tag{7.3}$$

есть функции, ортогональные ко всем функциям $v_k(x)$, следовательно, уравнение (7.3) имеет только тривиальное решение, если ядро Шмидта $K_1(x,\xi)$ полное, и имеет конечное или счетное множество линейно независимых нетривиальных решений, если ядро неполное.

Для разрешимости ***неоднородного*** уравнения I рода

$$\int_l H(x,\xi)u(\xi)d\xi = f(x), \tag{7.4}$$

где функция $f(x) \in L_2(l)$, необходимо и достаточно, чтобы функция $f(x)$ раскладывалась в сходящийся ряд по функциям $u_k(x)$.

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k\, u_k(x), \text{ где } f_k = (f, u_k),$$

ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \mu_k |f_k|^2$ сходится.

Если эти условия выполнены, то общее решение (7.4) имеет вид

$$u(x) = u_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\mu_k}\, f_k\, v_k(x),$$

где $u_0(x)$ – любое решение однородного уравнения (7.3). Если ядро Шмидта $K_1(x,\xi)$ полное, то $u_0(x) \equiv 0$, и (7.4) при выполнении указанных условий имеет единственное решение

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\mu_k}\, f_k\, v_k(x).$$

§ 8. Понятие о некорректных задачах

Если нормированные собственные функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x), \ldots$ не образуют полную систему в $L_2\,[a,\, b]$, то ортогональное ядру слагаемое в $u_n(x)$, возникшее из-за неточности в задании функции f и погрешностей вычисления (округления, неточность формул численного интегрирования), с ростом n увеличивается. Подобные задачи, решение которых может существенно измениться и даже перестать существовать при малом изменении исходных данных, называются ***некорректными***; естественно, что на решении этих задач существенно сказываются и погрешности вычисления. Впервые на некорректные задачи обратил внимание выдающийся французский математик К. Адамар (1865–1963), но систематическое их изучение началось с работ советского математика и геофизика А. Н. Тихонова. Многие задачи, как классические (например, задача численного дифференцирования или задача о решении уравнения Фредгольма 1-го рода), так и новые, являются некорректными, и для их решения предложен ряд методов ***регуляризации*** (корректизации), дающих возможность аппроксимировать некорректную задачу корректными.

Укажем в качестве примера на метод перехода к уравнению 2-го рода с помощью добавления к одной из частей уравнения

$$\int_a^b K(x,\xi)u(\xi)d\xi = f(x) \tag{8.1}$$

члена $\alpha u(x)$. При этом коэффициент α должен быть выбран не слишком большим (иначе существенно изменится решение) и не слишком малым (иначе добавленный член практически не скажется). Подходящее значение α можно подобрать эмпирически с помощью анализа модельных задач с известными решениями.

Более точно это означает следующее. В реальных задачах характер решения обычно бывает известен. Выберем функцию $\widetilde{u}(x)$ того же характера, что и искомое решение $u(x)$ (при расшифровке неопределенного термина «того же характера» существенная роль принадлежит опыту и интуиции, которые должны подсказать, какие из особенностей решения являются наиболее важными), и вычислим

$$\int_a^b K(x,\xi)\widetilde{u}(\xi)d\xi = \widetilde{f}(x).$$

Теперь можно рассматривать это равенство как интегральное уравнение с заданной функцией $\widetilde{f}(x)$ и искомой $\widetilde{u}(x)$. Применив к нему численный метод, который мы хотим испытать, мы можем сравнить полученное приближенное решение с точным, т. е. с $\widetilde{u}(x)$; если результат получится удовлетворительным, то можно с известным основанием считать, что и для исходного уравнения (8.1) метод будет пригоден. Если характер решения известен недостаточно, то можно испытать метод на нескольких функциях $\widetilde{u}(x)$.

Упражнения к разделу 4

Вычислить $D(\lambda)$ и определить характеристические числа λ для следующих симметричных ядер и интервалов.

1. $K(x,\xi) = 1; \quad (0,1)$.
2. $K(x,\xi) = x\xi; \quad (0,1)$.
3. $K(x,\xi) = \sin x \sin \xi; \quad (0,2\pi)$.
4. $K(x,\xi) = x + \xi; \quad (0,1)$.
5. $K(x,\xi) = x^2 + \xi^2; \quad (0,1)$.
6. $K(x,\xi) = x^2\xi + x\xi^2; \quad (0,1)$.

7. $K(x,\xi)=x^2+x\xi+\xi^2; \quad (0,1)$.

Решить интегральные уравнения.

8. $u(x)=x+\lambda\int\limits_0^1 u(\xi)\,d\xi \quad (\lambda\neq 1)$.

9. $u(x)=\frac{1}{2}-x+\int\limits_0^1 u(\xi)\,d\xi$.

10. $u(x)=\left(-6\pm 4\sqrt{3}\right)\int\limits_0^1 (x+\xi)u(\xi)\,d\xi$.

11. $u(x)=\left(1-\sqrt{3}x\right)+\left(-6+4\sqrt{3}\right)\int\limits_0^1 (x+\xi)u(\xi)\,d\xi$.

12. $u(x)=x^2-x^3+\int\limits_0^{\ln 2} e^x e^{\xi} u(\xi)\,d\xi$.

13. $u(x)=\left(1+\sqrt{3}x\right)+\left(-6-4\sqrt{3}\right)\int\limits_0^1 (x+\xi)u(\xi)\,d\xi$.

Р а з д е л 5. Сингулярные интегральные уравнения

§ 1. Одномерные сингулярные уравнения

В общем случае для функции одной переменной ***сингулярный интеграл*** определяется следующим образом. Пусть Г – кривая, замкнутая или незамкнутая, расположенная в комплексной плоскости. Пусть ξ – комплексная координата переменной точки контура Г. Допустим, что функция $f(\xi)$, определенная почти всюду на Г, обладает свойством: на Г существует такая внутренняя точка *t*; если эту точку вырезать кругом с центром в точке *t* произвольного радиуса $\varepsilon > 0$, то на оставшейся части Γ_ε контура Г функция $f(\xi)$ суммируема. Если при этом существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(\xi) d\xi,$$

то он называется ***сингулярным интегралом*** функции $f(\xi)$ по контуру Г и обозначается

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\Gamma_\varepsilon} f(\xi) d\xi = \int_{\Gamma} f(\xi) d\xi.$$

П р и м е р. Г – отрезок $-1 \le \xi \le 1$, $f(\xi) = \dfrac{1}{\xi^n}$, $n > 1$ – натуральное число.

Дуга (контур) называется ***ляпуновской***, если она имеет в каждой точке определенную касательную и угол φ между касательными в точках t_1 и t_2 этой дуги удовлетворяет неравенству

$$\varphi \le A \left| t_1 - t_2 \right|^{\alpha},$$

в котором A и α – положительные постоянные.

Будем рассматривать интегралы вида

$$\frac{1}{\pi i} \int_{\Gamma} \frac{u(\xi)}{\xi - t} d\xi, \quad t \in \Gamma, \tag{1.1}$$

где Г – ляпуновский контур.

Интеграл (1.1) существует, если $u(\xi)$ удовлетворяет на Г условию Гельдера

$$\left|u(\xi_1)-u(\xi_2)\right| \le A\left|\xi_1-\xi_2\right|^{\alpha},$$

где A и α – положительные постоянные.

Интеграл (1.1) будем называть ***сингулярным интегралом Коши***, выражение $\dfrac{1}{\xi-t}$ – ***ядро Коши***, функция $u(\xi)$ называется ***плотностью интеграла*** (1.1).

С сингулярным интегралом Коши тесно связан ***сингулярный интеграл Гильберта***

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}\,d\sigma, \quad -\pi \le s \le \pi. \qquad (1.2)$$

Если функция $u(\sigma)$ 2π – периодична и удовлетворяет условию Гельдера, то интеграл (1.2) существует при любом s.

Выше было сказано, что сингулярный интеграл (1.1) существует при любом t, если плотность $u(\xi)$ удовлетворяет на Г условию Гельдера. Если требовать существование не всюду на Г, то можно сформулировать общий результат.

Теорема 1.1. Если на контуре Г направление выпуклости меняется только конечное число раз, а плотность $u(\xi)$ суммируема на Г, то сингулярный интеграл (1.1) существует почти при всех $t \in \Gamma$.

Из теоремы следует, что сингулярный интеграл Коши (1.1) можно рассматривать как оператор, который любой суммируемой вдоль Г функции $u(t)$ приводит в соответствие новую функцию

$$V(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{u(\xi)}{\xi-t}\,d\xi,$$

определенную почти всюду на Г. Оператор обозначают S

$$(Su)(t)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{u(\xi)}{\xi-t}d\xi.$$

Предполагаем, что контур Γ ограничивает область D комплексной плоскости, вообще говоря, многосвязную. Пусть контур проходит в положительном направлении. Контур Γ состоит из конечного или счетного множества замкнутых или незамкнутых кривых $\Gamma_0, \Gamma_1, \ldots$, каждая из которых имеет непрерывную кривизну.

Формулы дифференцирования

1. Если $u \in L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$, то

$$\frac{d}{dt}\int_{\Gamma}u(\xi)\ln\frac{1}{\xi-t}d\xi=\pi i u(t)+\int_{\Gamma}\frac{u(\xi)}{\xi-t}d\xi .$$

2. Если $u(\xi)$ непрерывна на Γ и $u'(\xi)\in L_p(\Gamma)$, то

$$\frac{d}{dt}\int_{\Gamma}\frac{u(\xi)}{\xi-t}d\xi=\int_{\Gamma}\frac{u'(\xi)}{\xi-t}d\xi .$$

3. Аналогичные формулы верны и для интегралов Гильберта

$$\frac{d}{ds}\int_{-\pi}^{\pi}u(\sigma)\ln\left|\sin\frac{\sigma-s}{2}\right|d\sigma=-\int_{-\pi}^{\pi}u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma , \tag{1.3}$$

$$\frac{d}{ds}\int_{-\pi}^{\pi}u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma=\int_{-\pi}^{\pi}u'(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma . \tag{1.4}$$

Формула (1.4) верна, если $u(\sigma)$ непрерывна, $u'(\sigma)$ суммируема со степенью p на отрезке $[-\pi;\pi]$ и если $u(-\pi)=u(\pi)$; формула (1.3) верна, если $u \in L_p(-\pi;\pi)$.

Формулы интегрирования

1. Если $u \in L_p(\Gamma)$, $v \in L_p(\Gamma)$, то

$$\int_{\Gamma}v(t)\left[\int_{\Gamma}\frac{u(\xi)}{\xi-t}d\xi\right]dt=\int_{\Gamma}u(\xi)\left[\int_{\Gamma}\frac{v(t)}{\xi-t}dt\right]d\xi .$$

2. Если при некотором фиксированном p, $0 < p < 1$,

$$\int\limits_{\Gamma}\int\limits_{\Gamma}|\varphi(\xi,\tau)|^{p}|d\xi||d\tau|<\infty,$$

то

$$\int\limits_{\Gamma}\frac{1}{\xi-t}\left[\int\limits_{\Gamma}\varphi(\xi,\tau)d\tau\right]d\xi=\int\limits_{\Gamma}\left[\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\xi,\tau)}{\xi-t}d\xi\right]d\tau.$$

3. Формулы перестановки порядка интегрирования в двойном сингулярном интеграле. Если $u\in L_p(\Gamma)$, Γ – замкнутый контур, то

$$\frac{1}{(\pi i)^2}\int\limits_{\Gamma}\frac{1}{\tau-t}\left[\int\limits_{\Gamma}\frac{u(\xi)}{\xi-\tau}d\xi\right]d\tau=u(t). \tag{1.5}$$

Это ***формула Пуанкаре – Бертрана***. Ее можно записать как $S^2=J$, где J – тождественный оператор.

4. Формула для интегралов Гильберта

$$\frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\operatorname{ctg}\frac{\varpi-s}{2}\left[\int\limits_{-\pi}^{\pi}u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-\varpi}{2}d\sigma\right]d\varpi=-u(s)+\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}u(\sigma)d\sigma.$$

Пусть функция $\varphi(\xi,\tau)$ удовлетворяет по обеим переменным сразу условию Гельдера и контур Γ замкнутый или незамкнутый, удовлетворяющий вышеизложенным условиям. Тогда

$$\frac{1}{(\pi i)^2}\int\limits_{\Gamma}\frac{1}{\tau-t}\left[\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\xi,\tau)}{\xi-\tau}d\xi\right]d\tau=\frac{1}{(\pi i)^2}\int\limits_{\Gamma}\left[\int\limits_{\Gamma}\frac{\varphi(\xi,\tau)}{(\xi-\tau)(\tau-t)}d\tau\right]d\xi+\varphi(t,t).$$

Регуляризация

Банаховым пространством называется линейное нормированное пространство, полное в смысле сходимости по норме.

Правая и левая регуляризация. Пусть X, X_1 – банаховы пространства (которые могут и совпадать) и A – линейный замкнутый оператор, действующий из X в X_1. Будем говорить, что оператор A допускает ***левую регуляризацию***, если существует такой ограниченный оператор B**,** действующий из X_1 в X, что

$$BA = J + T,$$

где J – тождественный, а T – вполне непрерывный оператор в X. Аналогично оператор A допускает ***правую регуляризацию***, если существует такой ограниченный оператор C, действующий из X_1 в X, что

$$AC = J_1 + T_1,$$

где J_1 и T_1 – операторы, соответственно тождественный и вполне непрерывный, в пространстве X_1.

Операторы B и С называются (соответственно ***левым*** и ***правым***) ***регуляризаторами*** оператора A.

Оператор A допускает ***левую эквивалентную*** регуляризацию, если существует такой левый регуляризатор B, что уравнения

$$A\,u = f \tag{1.6}$$

и

$$BA\,u = B\,f$$

эквивалентны, каков бы ни был элемент $f \in X_1$.

Оператор A допускает ***правую эквивалентную*** регуляризацию, если существует такой правый регуляризатор C, что при любом $f \in X_1$ уравнения (1.6) и

$$AC\,v = f \tag{1.7}$$

эквивалентны в следующем смысле: уравнения (1.6) и (1.7) одновременно разрешимы или неразрешимы; любому решению u уравнения (1.6) соответствует решение v уравнения (1.7) такое, что $Cv = u$.

В последующем звездочкой будет обозначаться сопряженный оператор.

Если оператор A допускает левую регуляризацию, то сопряженный оператор A^* допускает правую регуляризацию, и наоборот.

Индекс оператора. Решения однородного уравнения

$$A\,u = 0$$

называются ***нулями*** оператора A. Если A – замкнутый линейный оператор, то его нули образуют подпространство, размерность которого называется ***числом нулей*** оператора A и обозначается $\alpha(A)$. Если хотя бы одно из чисел $\alpha(A)$ и $\alpha\left(A^*\right)$ конечно, то разность

$$\operatorname{Ind} A = \alpha(A) - \alpha\left(A^*\right)$$

называется ***индексом*** оператора A. Очевидно,

$$\operatorname{Ind} A = -\operatorname{Ind} A^* .$$

Оператор A называется ***нормально разрешимым,*** если для разрешимости уравнения (1.6) достаточно (необходимость этого условия тривиальна), чтобы его свободный член был ортогонален ко всем нулям сопряженного оператора A^*, иначе говоря, чтобы для уравнения была верна теорема Фредгольма.

Теорема 1.2. Если оператор A допускает левую регуляризацию, то число $\alpha(A)$ конечно.

Следствие 1.1. Если A допускает правую регуляризацию, то число $\alpha\left(A^*\right)$ конечно.

Следствие 1.2. Если A допускает двустороннюю регуляризацию, то $\operatorname{Ind} A$ конечен.

Теорема 1.3. Если замкнутый оператор допускает левую регуляризацию, то он нормально разрешим.

Теорема 1.4. Пусть ограниченный оператор $A,$ действующий из X в X_1, допускает левую регуляризацию. Тогда для любого вполне непрерывного оператора T, действующего из X в X_1, справедливо тождество

$$\operatorname{Ind}(A+T) = \operatorname{Ind} T .$$

Случай замкнутого контура. Символ

Общий сингулярный оператор. Будем рассматривать сингулярное интегральное уравнение вида

$$Au = a(t)u(t) + b(t)(Su)(t) + (Tu)(t) = f(t) \tag{1.8}$$

в пространстве $L_p(\Gamma)$. Контур Г будем считать замкнутым, с непрерывной кривизной; *S,* как и выше, означает оператор Коши; *T* – оператор, вполне непрерывный в $L_p(\Gamma)$; $a(t)$ и $b(t)$ – функции, заданные и непрерывные на Г; $f(t)$ – функция из $L_p(\Gamma)$. Искомую функцию считаем принадлежащей $L_p(\Gamma)$.

Оператор *A*, определяемый левой частью уравнения (1.8), будем называть ***общим сингулярным оператором,*** или иногда просто ***сингулярным оператором***; если *T* = 0*,* то оператор *A* будем называть ***простейшим***.

Практически важен вопрос о том, при каких условиях решения уравнения (1.8) не только суммируемы с той или иной степенью, но удовлетворяют еще условию Гельдера, $\alpha > 0$.

Пусть данные функции $a(t)$, $b(t)$, $f(t)$ удовлетворяют на контуре Г условию Гельдера, $0 < \alpha < 1$, а оператор *T* имеет вид

$$(Tu)(t) = \int_\Gamma K(t,\xi)u(\xi)d\xi,$$

причем ядро $K(t,\xi)$ ограничено и удовлетворяет неравенству

$$|K(t_1,\xi) - K(t_2,\xi)| \le N|t_1 - t_2|^\alpha,$$

в котором *N* не зависит от t_1, t_2, ξ. Тогда любое решение уравнения (1.8), суммируемое на Г со степенью, большей единицы, удовлетворяет на Г условию Гельдера.

В теории одномерных сингулярных уравнений важную роль играет следующая лемма.

Лемма 1.1. Если функция *c*(*t*) непрерывна на Г, то оператор

$$S(cu) - cS(u) = \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{c(\xi) - c(t)}{\xi - t} u(\xi)d\xi$$

вполне непрерывен в $L_p(\Gamma)$.

Символ сингулярного оператора. Введем в рассмотрение независимую переменную θ, принимающую только два значения: +1 и –1. ***Символом*** сингулярного оператора *A*, определяемого левой частью уравнения (1.8), а также символом самого уравнения называется функция двух переменных t и θ

$$\Phi_A(t,\theta) = a(t) + b(t)\theta . \tag{1.9}$$

Из определения сразу вытекают следующие простые свойства символа:

1) символ тождественного оператора равен единице.

2) символ любого вполне непрерывного оператора равен нулю;

3) символ суммы двух сингулярных операторов равен сумме их символов;

4) по данному символу сингулярный оператор восстанавливается с точностью до вполне непрерывного слагаемого.

Лемма и формула Пуанкаре–Бертрана позволяют установить основное свойство символа.

5) символ произведения двух сингулярных операторов равен произведению символов этих операторов.

Из свойств 4 и 5 сразу вытекает, что умножение сингулярных операторов коммутативно с точностью до вполне непрерывного оператора; если A_1 и A_2 – два сингулярных оператора, то разность $A_1A_2 - A_2A_1$ вполне непрерывна.

Будем говорить, что символ ***вырождается***, если при хотя бы одной паре значений $t \in \Gamma$ и $\theta = \pm 1$ значение символа равно нулю. Если при любых $t \in \Gamma$ и $\theta = \pm 1$ символ отличен от нуля, то будем говорить, что он не вырождается. Очевидно, символ (1.9) не вырождается тогда и только тогда, когда

$$a^2(t) - b^2(t) \neq 0, \quad t \in \Gamma . \tag{1.10}$$

В этом пункте рассматриваются только операторы с невырождающимся символом.

Теорема 1.5. Если символ оператора (1.8) не вырождается, то этот оператор допускает двустороннюю регуляризацию. Регуляризатором, как левым, так и правым, является оператор B, определяемый формулой

$$Bu = \frac{1}{a^2(t) - b^2(t)}\big(a(t)u(t) - b(t)Su\big). \tag{1.11}$$

Теорема (Нетера) 1.6. Пусть контур Г – замкнутый, с непрерывной кривизной, и символ сингулярного оператора непрерывен и не вырождается. Тогда этот оператор нормально разрешим и имеет конечный индекс, который не зависит от вполне непрерывного слагаемого в операторе.

Важным дополнением к теореме 1.6 является формула для вычисления индекса, впервые полученная Ф. Нетером: если сингулярный оператор A имеет вид (1.8), то

$$\operatorname{Ind} A = \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} d \arg \frac{a(t) - b(t)}{a(t) + b(t)}.$$

Если $\operatorname{Ind} A \geq 0$, то оператор A допускает левую эквивалентную регуляризацию, эквивалентным оператором в этом случае служит оператор (1.11).

Если коэффициенты a и b постоянные и $a^2 - b^2 \neq 0$, то регуляризация сразу приводит к решению сингулярного уравнения. Пусть это уравнение имеет вид

$$a\, u(t) + b\, (Su)(t) = f(t).$$

Воздействуя на его обе части регуляризатором

$$\frac{1}{a^2 - b^2}(aJ - bS),$$

найдем решение:

$$u(t) = \frac{a}{a^2 - b^2} f(t) - \frac{b}{a^2 - b^2}(Sf)(t).$$

Если a и b – постоянные и $a^2 - b^2 = 0$, то однородное сингулярное уравнение имеет бесконечно много линейно независимых решений.

Сингулярное уравнение с ядром Гильберта. В общем случае такое уравнение имеет вид

$$(A_0 u)(s) = a(s)u(s) + \frac{b(s)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} u(\sigma) \operatorname{ctg} \frac{\sigma - s}{2} d\sigma + (Tu)(s) = f(s), \quad (1.12)$$

где T – оператор, вполне непрерывный в пространстве $L_p(-\pi;\pi)$. Условие (1.10) для этого уравнения принимает вид

$$a^2(s)+b^2(s)\neq 0, \quad s\in[-\pi;\pi].$$

Если это условие выполнено, то для оператора (1.12) двусторонний регуляризатор определяется выражением

$$(B_0u)(s)=\frac{1}{a^2(s)+b^2(s)}\left(a(s)u(s)-\frac{b(s)}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}u(\sigma)\operatorname{ctg}\frac{\sigma-s}{2}d\sigma\right).$$

Индекс оператора A_0 задается формулой

$$\operatorname{Ind}A_0=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}d\arg\frac{a(s)-ib(s)}{a(s)+ib(s)}.$$

Метод Карлемана для замкнутого контура

Замечательный метод решения одномерных сингулярных интегральных уравнений был предложен Т. Карлеманом. Сам Карлеман рассмотрел только случай, когда контур Г разомкнутый и представляет собой отрезок вещественной оси. Однако метод допускал распространение на многие другие случаи; метод Карлемана был широко использован и обобщен в работах Ф. Д. Гахова, Н. И. Мусхелишвили.

Сведение сингулярного уравнения к краевой задаче. Рассмотрим простейшее сингулярное уравнение

$$a(t)u(t)+b(t)(Su)(t)=f(t). \tag{1.13}$$

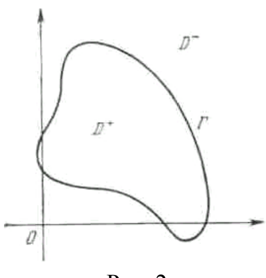

Рис. 2

Допустим, что его символ не вырождается, так что выполнено условие (1.10), и что коэффициенты $a(t)$ и $b(t)$ удовлетворяют условию Липшица с положительным показателем. Пусть $f\in L_p(\Gamma)$. Для простоты примем, что Г – односвязный замкнутый контур. Пусть этот контур ограничивает область D^+ изнутри и область D^- извне (рис. 2).

Введем в рассмотрение интеграл типа Коши

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{u(\xi)}{\xi-z}d\xi, \quad z\in\Gamma, \tag{1.14}$$

Формула (1.14) определяет две голоморфные (аналитические) функции комплексной переменной z в соответствии с тем, находится ли в D^+ или в D^-. Будем обозначать эти функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$. Отметим, что $\Phi^-(\infty)=0$.

Уравнение (1.13) приводится к уравнению

$$\Phi^+(t)-\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}\Phi^-(t)=\frac{f(t)}{a(t)+b(t)}, \quad t\in\Gamma, \tag{1.15}$$

где

$$\Phi^+(t)=\frac{1}{2}u(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{u(\xi)}{\xi-t}d\xi,$$

$$\Phi^-(t)=-\frac{1}{2}u(t)+\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{u(\xi)}{\xi-t}d\xi.$$

Таким образом, сингулярное уравнение (1.13) сведено к следующей краевой задаче теории функций комплексной переменной: найти аналитические в областях D^+ и D^- соответственно функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, краевые значения которых связаны линейным уравнением. Эту задачу разные авторы называют ***задачей Римана, Гильберта, Римана–Гильберта.***

Решение краевой задачи. Обозначим через m индекс уравнения (1.13), определяемый формулой

$$m=\operatorname{Ind}A_1=\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma d\arg\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}.$$

Поместив начало координат внутри D^+, можно положить

$$\ln\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}=\mu(t)+m\ln t,$$

где $\mu(t)$ на контуре Г непрерывна и удовлетворяет условию Липшица с положительным показателем.

Введем новую функцию комплексной переменной z,

$$F(z)=\Phi(z)e^{-\omega(z)}, \quad \omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\mu(\xi)}{\xi-z}d\xi.$$

Значения функции $F(z)$ в областях D^+ и D^- будем обозначать через $F^+(z)$ и $F^-(z)$. Очевидно, $F^-(\infty)=0$. Уравнение (1.15) принимает вид

$$F^+(t)-t^m F^-(t)=\frac{e^{-\omega(t)}t^{\frac{m}{2}}f(t)}{\sqrt{a^2(t)-b^2(t)}}, \tag{1.16}$$

где

$$\omega(t)=\frac{1}{2}(S\mu)(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{\mu(\xi)}{\xi-t}d\xi .$$

Дальнейшее зависит от индекса m.

1. Если $m=0$, то задача (1.16) имеет единственное решение

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma\frac{e^{-\omega(\xi)}f(\xi)}{\sqrt{a^2(\xi)-b^2(\xi)}}\cdot\frac{d\xi}{\xi-z},$$

что приводит к решению уравнения (1.13)

$$u(t)=\frac{a(t)}{a^2(t)-b^2(t)}f(t)-\frac{b(t)e^{\omega(t)}}{\pi i\sqrt{a^2(t)-b^2(t)}}\int_\Gamma\frac{e^{-\omega(\xi)}f(\xi)}{\sqrt{a^2(\xi)-b^2(\xi)}}\cdot\frac{d\xi}{\xi-t}.$$

В этом случае решение уравнения (1.13) существует и единственно.

2. Если $m>0$, то решение существует, но не единственно. Убедиться в этом можно так: будем искать такое решение уравнения (1.16), в котором

$$F^-(z)=O\left(|z|^{-m-1}\right),\quad z\to\infty.$$

Положив

$$F_1(z)=\begin{cases}F^+(z), & z \text{ внутри } \Gamma,\\ z^m F^-(z), & z \text{ вне } \Gamma,\end{cases}$$

найдем, что $F_1(z)$ удовлетворяет уравнению:

$$F_1^+(t)-F_1^-(t)=\frac{e^{-\omega(t)}t^{\frac{m}{2}}f(t)}{\sqrt{a^2(t)-b^2(t)}} \tag{*}$$

и $F_1^-(\infty)=0$; единственное решение этой новой задачи имеет вид

$$F_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{-\omega(\xi)}\xi^{\frac{m}{2}}f(\xi)}{\sqrt{a^2(\xi)-b^2(\xi)}}\cdot\frac{d\xi}{\xi-z} \tag{**}$$

и доставляет нам частное решение задачи

$$F^+(z)=F_1^+(z), \quad F^-(z)=z^{-m}F_1^-(z).$$

К нему можно добавить общее решение соответствующей однородной задачи

$$F_0^+(t)-t^m F_0^-(t)=0\,. \tag{1.17}$$

На бесконечности функция $F_0^-(t)$ должна обращаться в нуль, и легко найти, что общее решение (1.17) имеет вид

$$F_0^+(z)=\sum_{k=0}^{m-1}\gamma_k z^k, \quad F_0^-(z)=\sum_{k=0}^{m-1}\gamma_k z^{k-m}, \tag{1.18}$$

где $\gamma_0,\gamma_1,\ldots,\gamma_{m-1}$ – произвольные постоянные. Частное решение уравнения (1.13) можно построить по формуле

$$u_0(t)=\frac{a(t)}{a^2(t)-b^2(t)}f(t)-\frac{b(t)e^{\omega(t)}t^{-\frac{m}{2}}}{\pi i\sqrt{a^2(t)-b^2(t)}}\int_\Gamma \frac{e^{-\omega(\xi)}\xi^{\frac{m}{2}}f(\xi)}{\sqrt{a^2(\xi)-b^2(\xi)}}\cdot\frac{d\xi}{\xi-t}\,. \tag{1.19}$$

Мы получим общее решение уравнения (1.13), прибавив к $u_0(t)$ произвольное решение однородного уравнения

$$a(t)\varphi(t)+b(t)(S\varphi)(t)=0\,. \tag{1.20}$$

Это уравнение имеет ровно m линейно независимых решений, которые можно получить, исходя из формул (1.18) (подробнее об их построении см. Гахов «Краевые задачи»). Обозначая эти решения через $\varphi_1(t),\ldots,\varphi_m(t)$, получаем общее решение уравнения (1.13) в виде

$$u(t)=u_0(t)+\sum_{k=1}^{m}c_k\varphi_k(t),$$

где c_k – произвольные постоянные, а $u_0(t)$ определяется формулой (1.19).

3. Если $m<0$, то однородное уравнение (1.20) имеет только тривиальное решение $\varphi(t)\equiv 0$. Сопряженное с ним однородное уравнение имеет ровно $|m|$ линейно независимых решений. Уравнение (1.13) имеет не более одного решения, которое существует тогда и только тогда, когда функция $f(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

$$\int_\Gamma \frac{e^{-\omega(\xi)}\xi^{-\frac{m}{2}-k}}{\sqrt{a^2(\xi)-b^2(\xi)}} f(\xi)d\xi = 0,\ k=1,2,\ldots,|m|. \tag{1.21}$$

Если условия (1.21) выполнены, то решение уравнения (1.13) дается правой частью формулы (1.18). К сформулированным только что результатам можно прийти так. Пусть $m<0$ и пусть решение существует. В уравнении (1.16) положим

$$F_1^+(z)=F^+(z),\quad F_1^-(z)=z^mF^-(z). \tag{1.22}$$

Тогда $F_1^-(\infty)=0$; уравнение (1.16) принимает вид (*); последнее уравнение имеет единственное решение (**). Из (1.22) вытекает, что на бесконечности

$$F_1(z)=O\left(|z|^{-|m|-1}\right).$$

А это имеет место тогда и только тогда, когда выполнены условия (1.21).

Равенства (1.21) – это условия ортогональности функции $f(t)$ к нулям оператора, сопряженного с оператором задачи (1.13). Выражение для этих нулей имеет вид

$$\overline{\psi}_k(t)=\frac{e^{-\omega(t)}t^{-\frac{m}{2}-k}}{\sqrt{a^2(t)-b^2(t)}}\frac{dt}{ds};\quad ds=|dt|,\ k=1,2,\ldots,|m|.$$

Из всего сказанного выше следует результат. Пусть коэффициенты оператора

$$Au=a(t)u(t)+b(t)(Su)(t)$$

с невырождающимся символом удовлетворяют условию Гельдера, $\alpha>0$, и пусть $\operatorname{Ind}A=m$. Тогда оператор A имеет m нулей, если $m>0$, и не имеет нетривиальных нулей, если $m\le 0$.

§ 2. Многомерные сингулярные уравнения

Введем обозначения: E_m – евклидово пространство m измерений; $x, y, z, \ldots$ – точки из E_m; $x(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ – декартовы координаты. $r = |x - y|$, $\theta = \dfrac{y - x}{r}$; точка θ пробегает сферу радиуса 1 с центром в начале координат (единичная сфера S).

Пусть D – область (конечная или бесконечная) пространства E_m. Будем рассматривать сингулярные интегралы вида

$$\int_D u(y)\frac{f(x,\theta)}{r^m}dy \overset{def}{=} \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{D\setminus(r<\varepsilon)} u(y)\frac{f(x,\theta)}{r^m}dy, \tag{2.1}$$

через dy обозначен элемент объема в E_m. Формула (2.1) имеет смысл, когда предел существует.

Точка x называется ***полюсом*** сингулярного интеграла (2.1), функция $f(x,\theta)$ – его ***характеристикой***, функция $u(y)$ – его ***плотностью***.

Будем предполагать, что характеристика удовлетворяет условию

$$\int_S f(x,\theta)dS = 0. \tag{2.2}$$

Интеграл (2.1), как правило, не существует, если условие (2.2) не выполнено.

Сформулируем некоторые условия, при которых интеграл (2.1) существует. Обозначим D – открытая область, $\overline{D}$ – замкнутая область, полученная из D присоединением точек ее границы.

Теорема 2.1. Пусть в замкнутой области $\overline{D}$ плотность $u(y)$ удовлетворяет условию Липшица с показателем α, $0 < \alpha < 1$, так что

$$|u(y) - u(x)| \le Cr^{\alpha}, \quad C = \text{const},$$

а на бесконечности условию $u(y) = O\left(|y|^{-k}\right)$, $k = \text{const} > 0$ (если область бесконечна). Пусть характеристика ограничена и непрерывна по x и θ. Тогда интеграл (2.1) существует при любом $x \in \overline{D}$ и представляет собой функцию от x, непрерывную в $\overline{D}$.

Теорема 2.2. Пусть плотность удовлетворяет условиям теоремы 2.1, а характеристика ограничена и непрерывно дифференцируема по декартовым координатам точек x и θ. Тогда интеграл (2.1) удовлетворяет условию Липшица с тем же показателем α и в любой конечной внутренней подобласти $D' \in D$.

Символ

Сингулярные интегралы будем рассматривать как операторы, действующие в некотором заданном банаховом пространстве функций, определенных в E_m. Пусть E – такое пространство.

Сингулярным оператором в E назовем оператор A, определяемый формулой

$$(Au)(x) = a(x)u(x) + \int_{E_m} u(y)\frac{f(x,\theta)}{r^m}dy + (Tu)(x);$$

T – оператор, вполне непрерывный в E.

Символом сингулярного оператора A назовем функцию $\Phi_A(x,\theta)$ точек $x \in E_m$, $\theta \in S$, удовлетворяющую при некоторых ограничениях, наложенных на $a(x)$ и $f(x,\theta)$, следующим требованиям:

1) символ любого вполне непрерывного оператора равен 0;

2) символ суммы двух сингулярных операторов равен сумме их символов;

3) символ произведения двух сингулярных операторов равен произведению их символов.

$$\Phi_A(x,\theta) = a(x) + \int_S \left[\ln\frac{1}{\cos\varphi} - \frac{i\pi}{2}\operatorname{sign}\cos\varphi\right] f(x,\theta')dS',$$

φ – угол между векторами, проведенными из начала координат в точки θ и θ'; интегрирование по переменной точке θ'.

Оператор, сопряженный с сингулярным

Пусть $g(x,\theta)$ – произвольная функция точек x и θ, где x пробегает некоторое множество M, θ пробегает единичную сферу S.

Будем считать, что $g(x,\theta)$ как функция от точки θ продолжена на все пространство E_m, кроме начала координат и бесконечно удаленной точки, таким образом, что эта функция сохраняет постоянное значение на любом луче, проходящем через начало координат. Будем рассматривать продолженную таким образом функцию как функцию, заданную в шаровом слое Ω, определяемом неравенством $\rho_1 \le |\theta| \le \rho_2$, где ρ_1 и ρ_2 – произвольно зафиксированные положительные числа.

Будем говорить, что при фиксированном x функция $g(x,\theta)$ принадлежит пространству $W_p^{(l)}(S)$, если, будучи продолжена так, как указано выше, она принадлежит пространству $W_p^{(l)}(\Omega)$. $W_p^{(l)}(\Omega)$ – это пространство Соболева (при l целом) или пространство Слободецкого (при l нецелом).

Норму в $W_p^{(l)}(S)$ зададим равенством

$$\|g\|_{W_p^{(l)}(S)} = \|g\|_{W_p^{(l)}(\Omega)}.$$

Будем говорить, что функция $g(x,\theta)$ равномерно (на множестве M) принадлежит пространству $W_p^{(l)}(S)$ и обозначать $g \in W_p^{(l)}(S)$, если $g \in W_p^{(l)}(S)$ при любом $x \in M$ и если

$$\|g\|_{W_p^{(l)}(S)} \le C,$$

где C не зависит от x.

Если сингулярный оператор A ограничен в $L_p(E_m)$, то существует сопряженный оператор A^*, действующий в $L_{p'}(E_m)$,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1,$$

и ограниченный в этом пространстве.

Укажем условия, при которых A^* также сингулярный оператор.

Теорема 2.3. Пусть A – простейший сингулярный оператор, символ которого $\Phi(\theta)$ не зависит от полюса. Тогда сопряженный оператор A^* есть простейший сингулярный оператор с символом $\overline{\Phi}(\theta)$.

Теорема 2.4. Пусть A – сингулярный оператор, символ которого $\Phi_A(x,\theta)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $\Phi_A \in W_2^{(l)}(S)$, где $l \geq \frac{m-1}{q}+2$, $q = \min(p, p')$;

2) символ непрерывен на римановой сфере равномерно относительно θ. Тогда сопряженный оператор A^* есть сингулярный оператор с символом $\Phi_{A^*}(x,\theta) = \overline{\Phi}_A(x,\theta)$.

Под ***римановой сферой*** для пространства E_m понимают единичную сферу в (m + 1)-мерном евклидовом пространстве E_{m+1}. Эту сферу обозначают Σ.

Регуляризация

Пусть A – сингулярный оператор, символ которого $\Phi_A(x,\theta)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.4. Пусть $\Phi_A(x,\theta)$ нигде не обращается в нуль, т. е. $\Phi_A(x,\theta)$ не вырождается. Тогда $[\Phi_A(x,\theta)]^{-1}$ удовлетворяет условиям теоремы 2.3, если $l \geq \frac{m}{2}+1$. Построим сингулярный оператор B с символом $\Phi_B(x,\theta) = [\Phi_A(x,\theta)]^{-1}$. A и B – операторы в $L_p(E_m)$.

A и B ограничены в $L_p(E_m)$, кроме того

$$BA = I + T',$$
$$AB = I + T'',$$

где T', T'' – операторы, вполне непрерывные в $L_p(E_m)$. Это значит, что B – двусторонний регуляризатор для A. Тогда для сингулярного уравнения

$$Au = g(\xi), \quad g \in L_p(E_m), \tag{2.3}$$

справедлива теорема Нетера.

Индекс оператора A равен нулю, следовательно, для уравнения (2.3) справедливы теоремы Фредгольма, которые в данном случае сводятся к следующему.

Уравнения

$$Au = 0 \text{ и } A^* u = 0$$

имеют одно и то же конечное число линейно независимых решений; неоднородное уравнение (2.3) разрешимо тогда и только тогда, когда $g(\xi)$ ортогональна ко всем решениям уравнения $A^* u = 0$.

Отсюда, в частности, следует, что уравнение (2.3) разрешимо, и при том единственным образом, при любой $g \in L_p(E_m)$, если соответствующее однородное уравнение $Au = 0$ не имеет нетривиальных решений.

Упражнения к разделу 5

Решить следующие уравнения.

1. $\cos \nu u(t) + \dfrac{\sin \nu}{\pi} \displaystyle\int_\Gamma \frac{u(\xi)}{\xi - t} d\xi = f(t)$, где Γ – окружность $|\xi| = 1$.

2. $\dfrac{1}{\pi i} \displaystyle\int_\Gamma \frac{u(\xi)}{\xi - x} d\xi = f(x), \quad -1 < x < 1.$

Р а з д е л 6. Нелинейные интегральные уравнения

§ 1. Нелинейные интегральные операторы

Операторы Урысона. Интегральный оператор вида

$$Au(x)=\int_{\Omega} K(x,\xi,u(\xi))d\xi\,, \tag{1.1}$$

где функция $K(x,\xi,u)$ – ядро оператора (1.1) – определенная при $x,\xi\in\Omega$, $-\infty<u<+\infty$; почти при всех $x,\xi\in\Omega$ непрерывная по *u*; при всех $-\infty<u<+\infty$ измеримая по совокупности переменных x,ξ на $\Omega\times\Omega$.

Оператор Урысона определен на измеримых функциях $u(x)$, для которых функция $K(x,\xi,u)$ суммируема на Ω по ξ почти при всех $x\in\Omega$; значение оператора (1.1) $Au(x)$ на каждой такой функции является измеримой функцией.

Частный случай операторов Урысона – ***операторы Гаммерштейна***. Эти операторы имеют вид

$$Au(x)=\int_{\Omega} K(x,\xi)f(\xi,u(\xi))d\xi\,,$$

где $f(\xi,u)$ – определенная при $\xi\in\Omega$, $-\infty<u<+\infty$ функция, почти при всех $\xi\in\Omega$ непрерывная по *u*; при всех $-\infty<u<+\infty$ измеримая по ξ на Ω; $K(x,\xi)$ – измеримая по совокупности переменных функция, определенная на $\Omega\times\Omega$. Оператор Гаммерштейна представим в виде произведения

$$A=K\cdot f\,,$$

нелинейного оператора

$$fu(\xi)=f(\xi,u(\xi))$$

и линейного интегрального оператора

$$Ku(x)=\int_{\Omega} K(x,\xi)u(\xi)d\xi\,.$$

§ 2. Операторы Урысона со значениями в пространстве *C*

Теорема 2.1. Пусть функция $K(x,\xi,u)$ ($x,\xi\in\Omega$, $-\infty<u<+\infty$) почти при всех $x,\xi\in\Omega$ непрерывная по u; при всех $-\infty<u<+\infty$ измеримая по совокупности переменных x,ξ на $\Omega\times\Omega$. Пусть при любом $h>0$ выполняется неравенство

$$|K(x,\xi,u)|\le R_h(x,\xi),\ (|u|\le h)$$

где $R_h(x,\xi)$ – измеримая по совокупности переменных функция, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{\Omega} R_h(x,\xi)d\xi\le k(h)<\infty,\quad (0<h<\infty)$$

и пусть, кроме того,

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{x\in\Omega}\int\limits_{\Omega}\max_{|u_i|\le h,|u_1-u_2|\le\delta}|K(x,\xi,u_1)-K(x,\xi,u_2)|d\xi=0\,.$$

Пусть для любого измеримого множества D и любого $x_0\in\Omega$ справедливо равенство

$$\lim_{x\to x_0}\int\limits_{D}K(x,\xi,u)d\xi=\int\limits_{D}K(x_0,\xi,u)d\xi\,.$$

Тогда оператор Урысона A с ядром $K(x,\xi,u)$ действует из пространства L_∞ в пространство C и непрерывен.

Теорема 2.2. Пусть функция $K(x,\xi,u)$ ($x,\xi\in\Omega$, $-\infty<u<+\infty$) почти при всех $x,\xi\in\Omega$ непрерывная по u; при всех $-\infty<u<+\infty$ измеримая по совокупности переменных x,ξ на $\Omega\times\Omega$. Пусть функция $K(x,\xi,u)$ удовлетворяет неравенству

$$|K(x,\xi,u)|\le R(x,\xi)+k|u|^p,$$

где $R(x,\xi)$ – измеримая по совокупности переменных функция, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{\Omega}R(x,\xi)d\xi\le k_1<\infty,$$

и пусть при любом $h>0$

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_{x\in\Omega}\int_{\Omega}\max_{|u_i|\le h,\,|u_1-u_2|\le\delta}\left|K(x,\xi,u_1)-K(x,\xi,u_2)\right|d\xi=0\,.$$

Пусть для любого измеримого подмножества $D\in\Omega$, любого $-\infty<u<+\infty$ и каждого $x_0\in\Omega$ справедливо равенство

$$\lim_{x\to x_0}\int_D K(x,\xi,u)\,d\xi=\int_D K(x_0,\xi,u)\,d\xi\,.$$

Пусть для любой неотрицательной функции *z* из L_p

$$\lim_{mes\,D\to 0}\sup_{|u|\le z}\sup_{x\in\Omega}\left|\int_D K(x,\xi,u(\xi))\,d\xi\right|=0\,.$$

Тогда оператор Урысона *A* с ядром $K(x,\xi,u)$ действует из пространства L_p в пространство *C* и непрерывен.

§ 3. Операторы Гаммерштейна со значениями в пространствах L_q

Исследования оператора Гаммерштейна

$$Au(x)=\int_\Omega K(x,\xi)\,f(\xi,u(\xi))\,d\xi$$

удобно проводить исходя из суперпозиции нелинейного оператора

$$fu(\xi)=f(\xi,u(\xi))$$

и линейного интегрального оператора

$$Ku(x)=\int_\Omega K(x,\xi)u(\xi)\,d\xi\,.$$

Признаки непрерывности оператора *A* получаются объединением признаков непрерывности нелинейного оператора *f* с признаками непрерывности линейного оператора *K*.

Говорят, что функция $f(\xi,u)$ $(\xi\in\Omega,-\infty<u<+\infty)$ удовлетворяет ***условиям Каратеодори***, если она почти при всех $\xi\in\Omega$ непрерывна по *u* и при всех $-\infty<u<+\infty$ измерима по ξ на Ω.

Теорема 3.1. Пусть функция $f(\xi,u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори. Тогда оператор

$$fu(\xi)=f(\xi,u(\xi))$$

действует из L_p в L_q в том и только в том случае, когда функция $f(\xi,u)$ удовлетворяет неравенству $(p<\infty)$

$$|f(\xi,u)|\le a(\xi)+b|u|^{\frac{p}{q}},$$

где $a(\xi)\in L_p, \quad b=\text{const},$ или неравенствам

$$|f(\xi,u)|\le a_h(\xi), \quad (|u|\le h),$$

где $a_h(\xi)\in L_q, \quad 0<h<\infty.$

Теорема 3.2. Пусть функция $f(\xi,u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, а оператор

$$fu(\xi)=f(\xi,u(\xi))$$

действует из L_p в L_q. Тогда оператор *f* непрерывен в том и только том случае, если выполнено одно из условий:

1) $q<\infty$;

2) $q=\infty; \quad p<\infty, \quad f(\xi,u)\equiv a(\xi);$

3) $q=p=\infty$, функция $f(\xi,u)$ удовлетворяет неравенствам

$$|f(\xi,u)-f(\xi,v)|\le \varphi_h(u-v), \quad (|u|,|v|\le h),$$

где $\varphi_h(z)$ при любом $h>0$ – непрерывная по *z* функция, $\varphi_h(0)=0$.

Теорема 3.3. Пусть функция $f(\xi,u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, а оператор

$$fu(\xi)=f(\xi,u(\xi))$$

действует из L_p в L_q, причем $q<\infty$. Тогда оператор *f* является абсолютно ограниченным в том и только в том случае, когда функция $f(\xi,u)$ удовлетворяет неравенству

$$M\left(f(\xi,u)\right) \le a(\xi) + b|u|^{\frac{p}{q}},$$

где $a(\xi) \in L_q$, $b = \mathrm{const}$, $M(u)$ – непрерывная функция, удовлетворяющая условию

$$\lim_{u\to\infty} \frac{M(u)}{u} = \infty.$$

Пусть E_1, E_2 – банаховы пространства. Действующий из E_1 в E_2 линейный оператор K называется ***регулярным***, если для некоторого действующего из E_1 в E_2 линейного положительного оператора K_0 выполняется неравенство

$$|Ku| \le K_0(|u|), \quad (u \in E_1).$$

Теорема 3.4. Пусть функция $f(\xi,u)$ удовлетворяет условиям Каратеодори, $K(x,\xi)$ – измеримая по совокупности переменных функция. Пусть оператор

$$fu(\xi) = f(\xi, u(\xi))$$

действует из L_p в L_r, а интегральный оператор K с ядром $K(x,\xi)$ действует из L_r в L_q. Тогда:

1) оператор Гаммерштейна $A = Kf$ действует из L_p в L_q;

2) оператор A непрерывен, если выполнено одно из условий:

а) $r < \infty$;

б) $r = \infty$, оператор K регулярен;

3) оператор A вполне непрерывен, если выполнено одно из условий:

а) $r < \infty$; оператор K вполне непрерывен;

б) $r < \infty$; оператор f абсолютно ограничен, оператор K регулярен;

в) $r = \infty$, оператор K регулярен.

§ 4. Существование и единственность решения

Постановка задачи. Рассмотрим уравнение вида

$$u(x)=\mu\int\limits_{\Omega}K(x,\xi,u(\xi))d\xi+f(x), \tag{4.1}$$

где Ω – ограниченное замкнутое множество конечномерного пространства ненулевой лебеговой меры; $K(x,\xi,u)$, $f(x)$, $(x,\xi\in\Omega)$ – заданные функции, μ – параметр, $u(x)$ – искомая функция.

Нелинейный интегральный оператор

$$Au(x)=\int\limits_{\Omega}K(x,\xi,u(\xi))d\xi$$

действует в некоторых банаховых пространствах E измеримых на Ω функций и обладает рядом свойств (непрерывен, вполне непрерывен, дифференцируем,…). Если при этом $f(x)\in E$, то уравнение (4.1) рассматривается как нелинейное операторное уравнение

$$u=\mu Au+f \ \text{ в } E. \tag{4.2}$$

При переходе к (4.2) в E не учитываются решения, не принадлежащие E.

Если (4.2) можно рассматривать в разных пространствах, то выбор E определяется тем, с какими свойствами решения нужны. Решения уравнения (4.2) – это неподвижные точки оператора

$$A_1u=\mu Au+f\ .$$

Методом доказательства существования решений у уравнения (4.2), а следовательно, и у уравнения (4.1) является применение принципов неподвижных точек (принцип Банаха сжатых отображений и принцип Шаудера).

Уравнения с операторами, удовлетворяющими условию Липшица

Говорят, что оператор A, действующий в банаховом пространстве E, удовлетворяет на множестве $M\subset E$ ***условию Липшица с постоянной*** q, если

$$\|Au-Av\|\le q\|u-v\|,\quad (u,v\in M). \tag{4.3}$$

Если при этом $q < 1$, то A называется ***оператором сжатия***.

Линейный ограниченный оператор удовлетворяет неравенству (4.3) при $q = \|A\|$.

Принцип сжатых отображений. Если оператор сжатия A преобразует в себя замкнутое множество $M \subset E$ ($AM \subset M$), то он имеет в M неподвижную точку u^*. Эта неподвижная точка может быть получена как предел последовательных приближений

$$u_n = Au_{n-1} \; (n = 1, 2, \ldots), \tag{4.4}$$

где u_0 – произвольный элемент из M.

Быстрота сходимости метода (4.4) характеризуется неравенством

$$\left\|u_n - u^*\right\| \leq \frac{q^n}{1-q}\left\|u_1 - u_0\right\|. \; (n = 1, 2, \ldots)$$

Теорема 4.1. Пусть функция $K(x,\xi,u)$ непрерывна по совокупности переменных $x,\xi \in \Omega, |u| \leq \rho$, и пусть

$$\left|\frac{\partial K(x,\xi,u)}{\partial u}\right| \leq C, \; \left(x,\xi \in \Omega, |u| \leq \rho\right).$$

Тогда уравнение

$$u(x) = \mu \int_{\Omega} K(x,\xi,u(\xi))d\xi$$

имеет единственное непрерывное решение $u^*(x)\,(x \in \Omega)$, удовлетворяющее неравенству $|u| \leq \rho$, если

$$|\mu| C \cdot \operatorname{mes}\Omega < 1,$$

$$|\mu| \max_{x \in \Omega} \int_{\Omega} \max_{|u| \leq \rho} |K(x,\xi,u)| d\xi \leq \rho.$$

Если $u_0(x)$ – произвольная непрерывная функция, удовлетворяющая неравенству

$$|u_0(x)| \leq \rho \quad (x \in \Omega),$$

то последовательные приближения

$$u_n(x) = \mu \int\limits_{\Omega} K(x, \xi, u_{n-1}(\xi))\, d\xi, \quad n \in \mathrm{N},$$

равномерно на Ω сходятся к $u^*(x)$.

Упражнения к разделу 6

1. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \frac{1}{3} \int\limits_{-1}^{1} \frac{xt}{1 + \varphi^2(t)}\, dt + 1.$$

2. Методом последовательных приближений решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int\limits_{0}^{x} \frac{1 + \varphi^2(t)}{1 + t^2}\, dt,$$

взяв в качестве нулевого приближения: 1) $\varphi_0(x) = 0$; 2) $\varphi_0(x) = x$.

3. Методом последовательных приближений решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int\limits_{0}^{x} \frac{t\varphi(t)}{1 + t + \varphi(t)}\, dt.$$

4. Методом последовательных приближений найти второе приближение $\varphi_2(x)$ решения интегрального уравнения

$$\varphi(x) = 1 + \int\limits_{0}^{x} \left[\varphi^2(t) + t\varphi(t) + t^2\right] dt.$$

5. Методом последовательных приближений найти третье приближение $\varphi_3(x)$ решения интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \int\limits_{0}^{x} \left[t\varphi^2(t) - 1\right] dt.$$

Список литературы

1. Васильева, А. Б. Интегральные уравнения. – М. : Физматлит, 2002.

2. Гельфанд, И. М. Вариационное исчисление / И. М. Гельфанд, С. В. Фомин. – М. : Физматгиз, I961.

3. Дифференциальные и интегральные уравнения, вариационное исчисление в примерах и задачах. – М. : Физматлит, 2003.

4. Интегральные уравнения. Справочная математическая библиотека / под ред. П. П. Забрейко и др. – М. : Наука, 1968.

5. Михлин, С. Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям / С. Г. Михлин. – М. : Физматгиз, 1977.

6. Трикоми, Ф. Интегральные уравнения / Ф. Трикоми. – М. : Изд-во ин. лит-ры, 1960.

7. Цлаф, Л. А. Вариационное исчисление и интегральные уравнения / Л. А. Цлаф. – СПб. : Лань, 2005.

8. Эльсгольц, Л. Э. Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление / Л. Э. Эльсгольц. – М.: Наука, 1969.